ใบความรู้ที่ 2.1.1

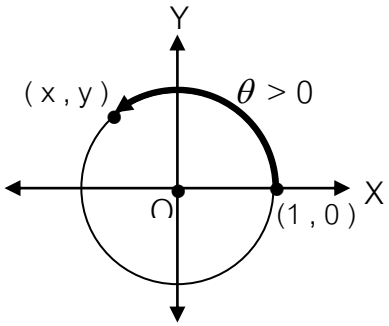
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 **บทที่** 2 **เรื่อง วงกลมหนึ่งหน่วย**

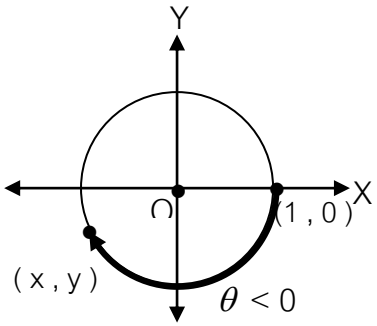
คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมเพิ่มเติมตามที่กำหนด เป็นกลุ่ม (15 นาที)

(1) วงกลมหนึ่งหน่วย ในระบบแกนพิกัดฉาก

เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) จุดกำเนิด รัศมียาว 1 หน่วย

และมีความสัมพันธ์ว่า $\{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$





จากรูป เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) ให้ แล้วระยะจากจุด (1,0) ไปตามความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x , y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย และมีข้อตกลงดังนี้

- ถ้า $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด (1,0) ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
- ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด (1,0) ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
- ถ้า $\theta = 0$ แล้ว จุดปลายส่วนโค้ง คือจุด (1,0)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาว่า จุดปลายส่วนโค้ง θ หน่วยที่กำหนดให้จะตกอยู่บนส่วนโค้งในควอดรันด์ใด ของวงกลมหนึ่งหน่วย

(1) เมื่อ $\theta = \frac{19\pi}{3}$

วิธีทำ $\theta = \frac{19\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

ตอบ จุดปลายส่วนโค้ง อยู่ในควอดรันด์ที่ 1

(2) เมื่อ $\theta = \frac{59\pi}{6}$

วิธีทำ $\theta = \frac{59\pi}{6} = 8\pi + \frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

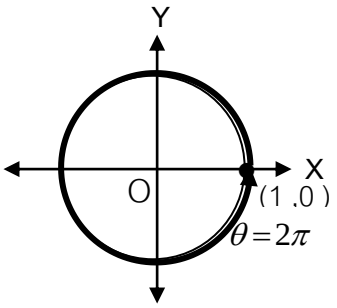
ตอบ จุดปลายส่วนโค้ง อยู่ในควอดรันด์ที่ 4

ใบความรู้ที่ 2.1.2

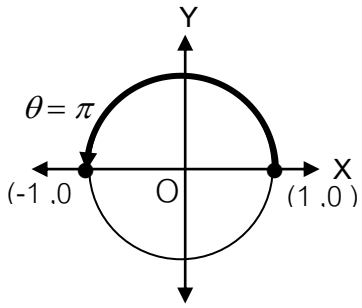
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 **บทที่** 2 **เรื่อง วงกลมหนึ่งหน่วย**

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมเพิ่มเติมตามที่กำหนด เป็นกลุ่ม (20 นาที)

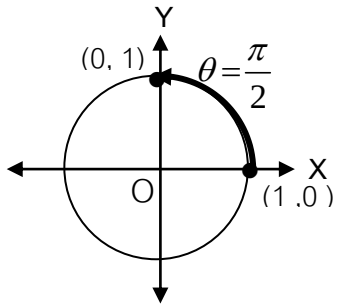
(2) **การแบ่งความยาวส่วนโค้ง ของวงกลมหนึ่งหน่วย**



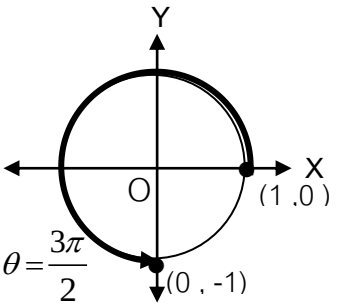
ความยาว 1 รอบ $\theta = 2\pi$



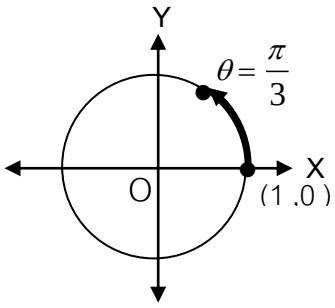
ความยาวครึ่งรอบ $\theta = \pi$



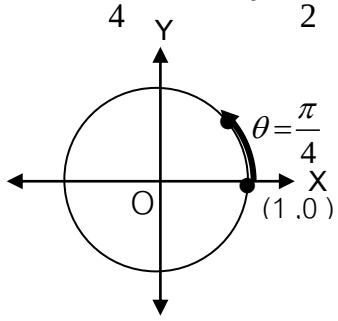
ความยาว $\frac{1}{4}$ ของรอบ $\theta = \frac{\pi}{2}$



ความยาว $\frac{3}{2}$ ของรอบ $\theta = \frac{3\pi}{2}$



ความยาว $\frac{1}{6}$ รอบ $\theta = \frac{\pi}{3}$



ความยาว $\frac{1}{8}$ ของรอบ $\theta = \frac{\pi}{4}$

ข้อตกลง ค่าของ x คือ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ เขียนแทนด้วย $y = \cos\theta$

ค่าของ y คือ ค่าของฟังก์ชันไซน์ เขียนแทนด้วย $y = \sin\theta$

ใบความรู้ที่ 2.1.3

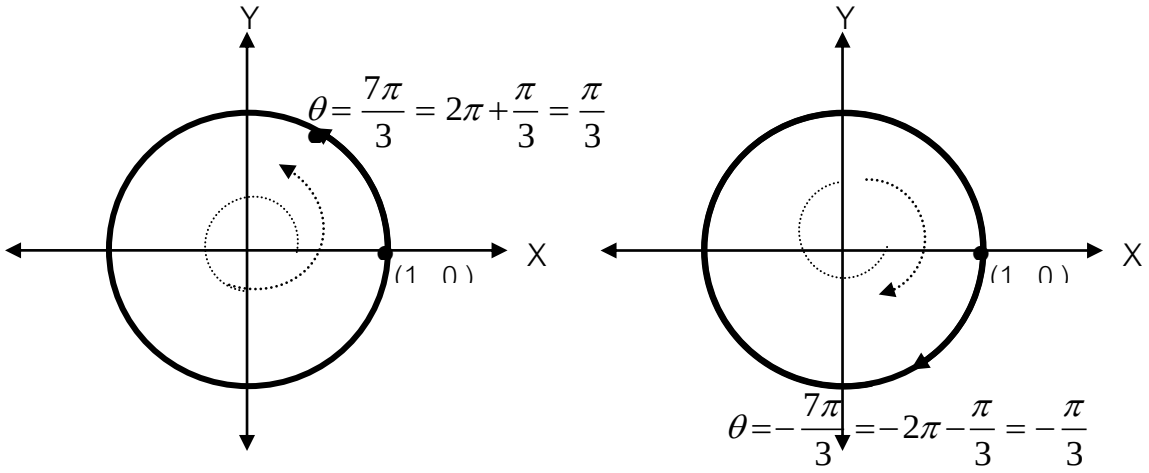
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 **บทที่** 2 **เรื่อง วงกลมหนึ่งหน่วย**

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมเพิ่มเติมตามที่กำหนด เป็นกลุ่ม (15 นาที)

ข้อสังเกต เกี่ยวกับความยาวส่วนโค้งและวงกลมหนึ่งหน่วย

1) ถ้าความยาวส่วนโค้ง θ หน่วยที่กำหนดให้ ยาวมากกว่า 1 รอบ ($> 2\pi$) ความยาวที่มากกว่านั้นก็จะวนกลับมาเริ่มต้นวัดที่จุด (1,0) เป็นรอบต่อไปเรื่อย ๆ และจุดสิ้นสุดก็จะตกอยู่ที่จุดใดจุดหนึ่งบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย นั่นเอง

ดังนั้น ถ้า θ ยาวมากกว่า 1 รอบ แล้ว $\theta = 2n\pi + \alpha = \alpha \ ; \ n \in I \ , \ 0 \le \alpha < 2\pi$



2) วงกลมหนึ่งหน่วย มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{ (x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ จะเห็นว่า $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$

ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์ และ โคไซน์ จะเป็นจำนวนจริง ตั้งแต่ - 1 ถึง 1

นั่นคือ เรนจ์ ของฟังก์ชันทั้งสองคือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ –1 ถึง 1

โดเมน ของฟังก์ชันทั้งสองคือ เซตของจำนวนจริง

3) จากสมการวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ แทนค่าด้วย x = cos θ , y = sin θ

จะได้ความสัมพันธ์ในรูปของฟังก์ชันใหม่ว่า $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

หรือเขียนตามความนิยม ได้ว่า $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

เอกสารฝึกหัดที่ 2.1.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 **บทที่** 2 **เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่าง เกี่ยวกับการวัดความยาวส่วนโค้ง

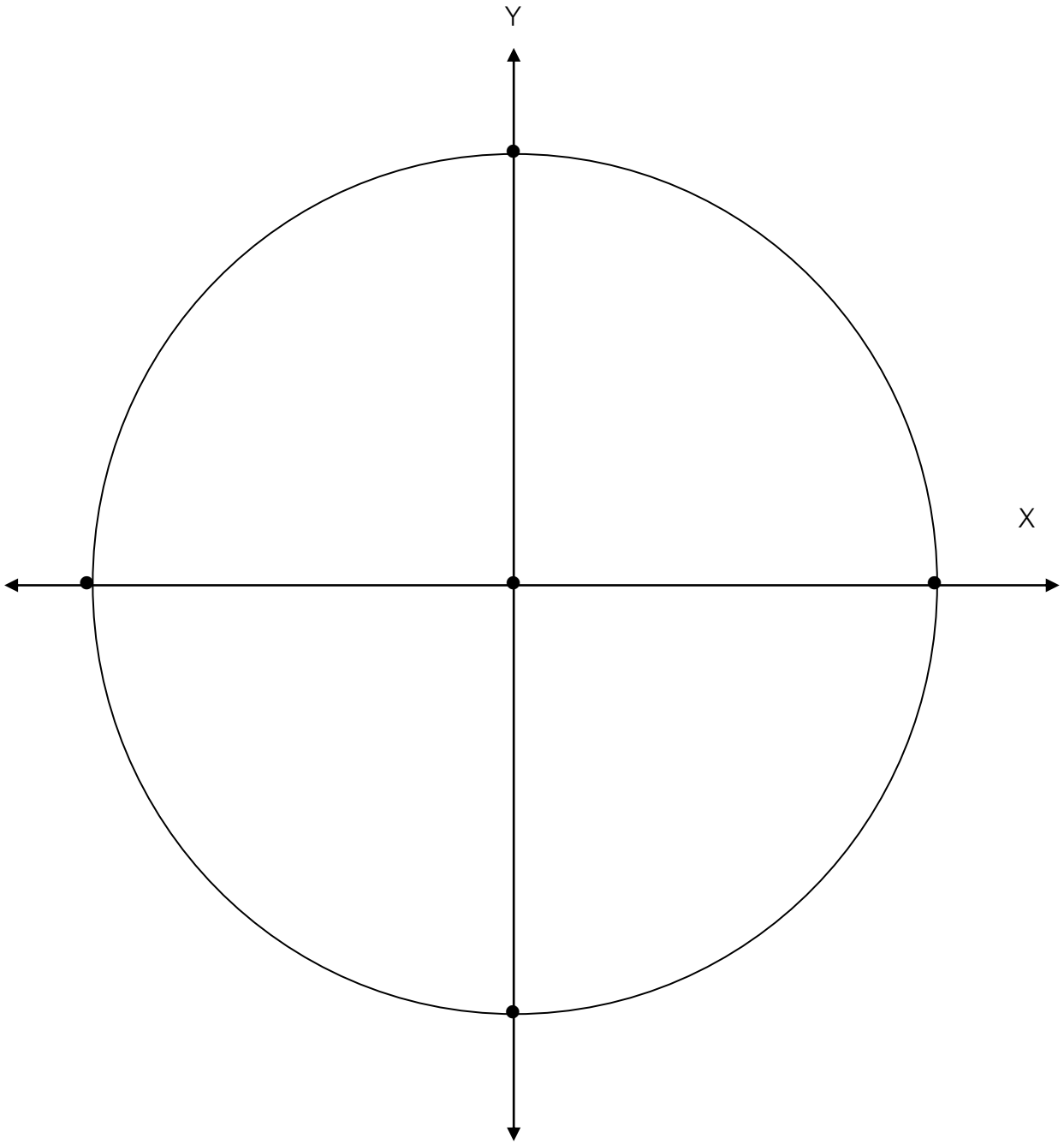
ความยาวส่วนโค้งที่กำหนด ให้ในวงกลมหนึ่งหน่วย	ถ้าความยาวเกิน 1 รอบ ให้แจกแจงอยู่ในรูป $\theta = 2n\pi + \alpha$	เมื่อตัดความยาวครบรอบออกแล้วจะเหลือ = α	จุดปลายส่วนโค้งจะตกอยู่ในควอดรันต์ใด หรือจุดใด
$\theta = \frac{\pi}{2}$	-	-	จุด (0 , 1)
$\theta = -\frac{\pi}{2}$			
$\theta = \pi$			
$\theta = -\pi$			
$\theta = \frac{3\pi}{2}$			
$\theta = -\frac{3\pi}{2}$			
$\theta = 2\pi$			
$\theta = -2\pi$			
$\theta = \frac{\pi}{6}$			
$\theta = \frac{3\pi}{4}$			
$\theta = \frac{4\pi}{3}$			
$\theta = \frac{11\pi}{6}$			
$\theta = \frac{15\pi}{2}$			
$\theta = \frac{29\pi}{3}$			
$\theta = -\frac{41\pi}{3}$			
$\theta = -\frac{67\pi}{4}$			

ใบกิจกรรมที่ 2.1.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203 **) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

ให้นักเรียน แบ่งวงกลมหนึ่งหน่วย ใน 1 รอบ ออกเป็น 4 , 6 , 8 , 12 ส่วน พร้อมระบุที่จุดปลายของแต่ละส่วนโค้งว่า เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาวเท่าไร



ใบงานที่ 2.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงแสดงวิธีหา จุดปลายส่วนโค้ง θ หน่วยที่กำหนดให้ว่า จะตกอยู่บนส่วนโค้งในควอดรันด์ใด ของวงกลมหนึ่งหน่วย

1.1) เมื่อ $\theta = \frac{33\pi}{4}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.2) เมื่อ $\theta = \frac{57\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.3) เมื่อ $\theta = \frac{87\pi}{6}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.4) เมื่อ $\theta = \frac{101\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.5) เมื่อ $\theta = -\frac{17\pi}{6}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.6) เมื่อ $\theta = -\frac{21\pi}{4}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.7) เมื่อ $\theta = -\frac{29\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.8) เมื่อ $\theta = -\frac{38\pi}{4}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 2.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

---

1. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = 3\pi$ ควรอยู่ที่ใด .....
2. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = -6\pi$ ควรอยู่ที่ใด .....
3. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = \frac{5\pi}{2}$ ควรอยู่ที่ใด .....
4. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ควรอยู่ที่ใด .....
5. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = \frac{5\pi}{3}$ ควรอยู่ที่ใด .....
6. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ควรอยู่ที่ใด .....
7. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = -\frac{3\pi}{2}$ ควรอยู่ที่ใด .....
8. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ ควรอยู่ที่ใด .....
9. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ ควรอยู่ที่ใด .....
10. จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\theta = \frac{11\pi}{6}$ ควรอยู่ที่ใด .....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ (ก่อนเรียน) รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203)

บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์

คำสั่ง ให้นักเรียนเลือกกากบาท (x) เพียงข้อละ 1 ตัวเลือก ลงในกระดาษคำตอบ

(1) จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\frac{\pi}{4}$ บนวงกลมหนึ่งหน่วย จะตกอยู่ในควอดรันต์ใด

ก. ควอดรันต์ที่ 1 ข. ควอดรันต์ที่ 2 ค. ควอดรันต์ที่ 3 ง. ควอดรันต์ที่ 4

(2) ข้อใดคือค่าของ $\sin\frac{2\pi}{3}$

ก. $\frac{1}{2}$ ข. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ค. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ง. $\frac{2}{3}$

(3) ข้อใดคือค่าของ $\cos\frac{5\pi}{6}$

ก. $\frac{1}{2}$ ข. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ค. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ง. $-\frac{1}{2}$

(4) ข้อใดคือค่าของ $\tan(-150^\circ)$

ก. $\sqrt{3}$ ข. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ค. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ง. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) ข้อใดคือค่าของ $\sin 120^\circ \cos 210^\circ + \tan 180^\circ \cot 90^\circ$

ก. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ข. $\frac{3}{4}$ ค. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ง. ไม่มีข้อใดถูก

(6) $\sin(90^0 + x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. sin x ข. cos x ค. - sin x ง. - cos x

(7) $\sin 75^0 + \sin 15^0$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ข. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ค. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ง. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(8) ถ้า $\cos A = -\frac{1}{2}$ เมื่อ $90^0 < A < 180^0$ แล้ว $\cos 2A$ จะเท่ากับข้อใด

ก. $-\frac{1}{2}$ ข. $\frac{1}{2}$ ค. -1 ง. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(9) ข้อใดคือค่าของ $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

ก. $\frac{\pi}{6}$ ข. $\frac{\pi}{4}$ ค. $\frac{\pi}{3}$ ง. $\frac{\pi}{2}$

(9) ข้อใดคือค่าของ $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

ก. $\frac{5\pi}{6}$ ข. $\frac{3\pi}{4}$ ค. $\frac{\pi}{3}$ ง. $\frac{2\pi}{3}$

(10) ข้อใดคือเซตคำตอบของสมการ $2\sin^2 x - 1 = 0$ เมื่อ $x \in [0, \pi]$

ก. $\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \}$ ข. $\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \}$ ค. $\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \}$ ง. ไม่มีข้อถูก

(11) กำหนด Δ ABC มีด้าน $a = 3\sqrt{3}$, $A = 30^0$, $C = 120^0$ แล้ว b จะยาวเท่าไร

ก. $3\sqrt{3}$ ข. $4\sqrt{2}$ ค. 9 ง. 12

(12) ชายคนหนึ่งขับรถจากจุด ก. ลงไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 6 ก.ม. ต่อจากนั้นขับรถต่อไปในทิศ 210^0 ถึงจุด เป็นระยะทาง 10 ก.ม. จงหาระยะห่างระหว่างจุด ก. และจุด ข.

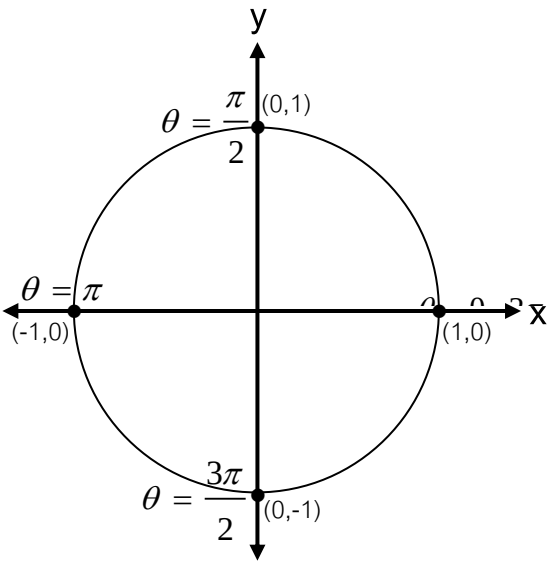
ก. 8 ก.ม. ข. 12 ก.ม. ค. 14 ก.ม. ง. 16 ก.ม.

ใบความรู้ที่ 2.2.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 บทที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกลุ่ม (เวลา 15 นาที)

1) **ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ บนพิกัดจุดปลายของแกนพิกัดฉาก**



- เมื่อ $\theta = 0$ **จะมีจุดปลายอยู่ที่**จุด (1,0)
  ดังนั้น $\cos 0 = 1$ และ $\sin 0 = 0$
- เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ **จะมีจุดปลายอยู่ที่**จุด (0,1)
  ดังนั้น $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ และ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$
- เมื่อ $\theta = \pi$ **จะมีจุดปลายอยู่ที่**จุด (-1,0)
  ดังนั้น $\cos\pi = -1$ และ $\sin\pi = 0$
- เมื่อ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ **จะมีจุดปลายอยู่ที่**จุด (0,-1)
  ดังนั้น $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ และ $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$
- เมื่อ $\theta = 2\pi$ **จะมีจุดปลายอยู่ที่**จุด (1,0)
  ดังนั้น $\cos 2\pi = 1$ และ $\sin 2\pi = 0$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ต่อไปนี้

(1) $\sin\frac{5\pi}{2}$ = ...

(2) $\sin(-\frac{\pi}{2})$ = ...

(3) $\sin 5\pi$ = ...

(4) $\cos\frac{5\pi}{2}$ = ...

(5) $\cos(-8\pi)$ = ...

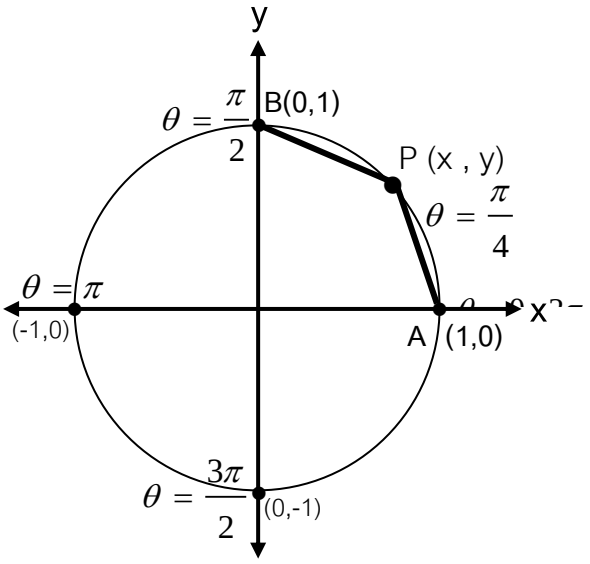
(6) $\cos(-\frac{3\pi}{2})$ = ...

ใบความรู้ที่ 2.2.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 บทที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกลุ่ม (เวลา 20 นาที)

2) **ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่จุดปลาย** $\theta = \frac{\pi}{4}$



จากรูป ส่วนโค้ง AP = ส่วนโค้ง PB

จะทำให้ | AP | = | PB |

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$(x-1)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2 = x^2+y^2-2y+1$$

$$\therefore \quad x = y$$

แต่สมการวงกลมหนึ่งหน่วยคือ $x^2+y^2=1$

จะได้ว่า $x^2+x^2=1$ หรือ $2x^2=1$

ดังนั้น $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

แสดงว่า $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ต่อไปนี้

(1) $\sin\frac{3\pi}{4}$ = ... $\cos\frac{3\pi}{4}$ = ...

(2) $\sin\frac{5\pi}{4}$ = ... $\cos\frac{5\pi}{4}$ = ...

(3) $\sin\frac{7\pi}{4}$ = ... $\cos\frac{7\pi}{4}$ = ...

(4) $\sin\frac{9\pi}{4}$ = ... $\cos\frac{9\pi}{4}$ = ...

(5) $\sin(-\frac{\pi}{4})$ = ... $\cos(-\frac{\pi}{4})$ = ...

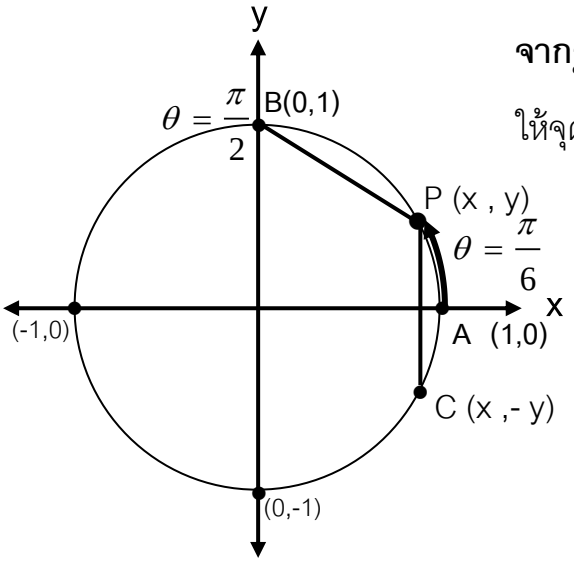
(6) $\sin(-\frac{3\pi}{4})$ = ... $\cos(-\frac{3\pi}{4})$ = ...

ใบความรู้ที่ 2.2.3

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 บทที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกลุ่ม (เวลา 20 นาที)

3) **ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่จุดปลาย** $\theta = \frac{\pi}{6}$



จากรูป ส่วนโค้ง AP $= \frac{\pi}{6}$ ดังนั้น ส่วนโค้ง PB $= \frac{\pi}{3}$

ให้จุด C เป็นจุดสะท้อนของจุด P โดยมีแกน X เป็นแกนสะท้อน ทำให้ จุด C มีพิกัดเป็น (x ,- y) และส่วนโค้ง PC $= \frac{\pi}{3}$ ด้วย

ดังนั้น คอร์ด PC = คอร์ด PB

$$\sqrt{[y-(-y)]^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$4y^2 = x^2+y^2-2y+1$$

$$4y^2+2y-2 = 0$$

$$(2y-1)(y+1) = 0$$

จะได้ว่า $2y-1=0$, $y+1=0$

$y = \frac{1}{2}$; $y=-1$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ต่อไปนี้

(1) $\sin\frac{5\pi}{6}$ = ... $\cos\frac{5\pi}{6}$ = ...

(2) $\sin\frac{7\pi}{6}$ = ... $\cos\frac{7\pi}{6}$ = ...

(3) $\sin\frac{11\pi}{6}$ = ... $\cos\frac{11\pi}{6}$ = ...

(4) $\sin(-\frac{5\pi}{6})$ = ... $\cos(-\frac{5\pi}{6})$ = ...

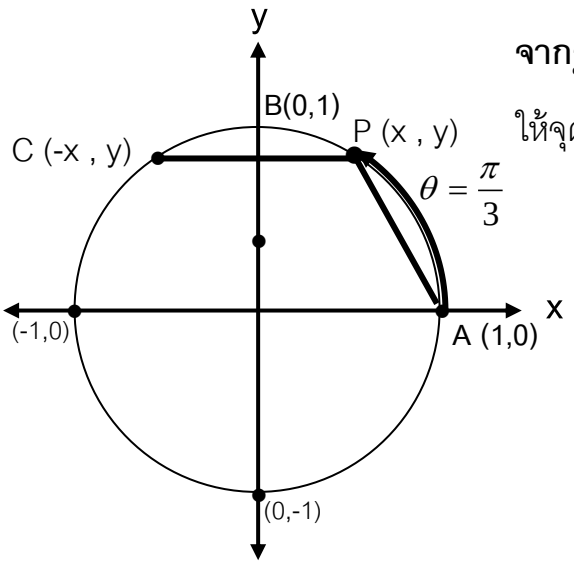
(5) $\sin(-\frac{7\pi}{6})$ = ... $\cos(-\frac{7\pi}{6})$ = ...

ใบความรู้ที่ 2.2.4

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 **บทที่** 2 **เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกลุ่ม (เวลา 20 นาที)

4) **ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่จุดปลาย** $\theta = \frac{\pi}{3}$



จากรูป ส่วนโค้ง AP $= \frac{\pi}{3}$

ให้จุด C เป็นจุดสะท้อนของจุด P โดยมีแกน Y เป็นแกนสะท้อน ทำให้ จุด C มีพิกัดเป็น (-x , y) และส่วนโค้ง PC $= \frac{\pi}{3}$ ด้วย

ดังนั้น คอร์ด AP = คอร์ด PC

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{[x-(-x)]^2}$$

$$x^2+y^2-2x+1 = 4x^2$$

$$2x^2+x-1 = 0$$

$$(2x-1)(x+1) = 0$$

จะได้ว่า $x = \frac{1}{2}$; $x = -1$ → เป็นไปไม่ได้

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ต่อไปนี้

(1) $\sin\frac{2\pi}{3}$ = ... $\cos\frac{2\pi}{3}$ = ...

(2) $\sin\frac{4\pi}{3}$ = ... $\cos\frac{4\pi}{3}$ = ...

(3) $\sin\frac{5\pi}{3}$ = ... $\cos\frac{5\pi}{3}$ = ...

(4) $\sin\frac{7\pi}{3}$ = ... $\cos\frac{7\pi}{3}$ = ...

(5) $\sin(-\frac{\pi}{3})$ = ... $\cos(-\frac{\pi}{3})$ = ...

(6) $\sin(-\frac{2\pi}{3})$ = ... $\cos(-\frac{2\pi}{3})$ = ...

ใบความรู้ที่ 2.2.5

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 **บทที่** 2 **เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกลุ่ม (เวลา 20 นาที)

5) ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

5.1 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง $-\theta$

จะได้ว่า $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

5.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง ที่มากกว่า 1 รอบ $(\theta > 2\pi)$

จะได้ว่า $\sin\theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos\theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$

5.3 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง ที่มีจุดปลายตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 2

จะได้ว่า $\sin\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

5.4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง ที่มีจุดปลายตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 3

จะได้ว่า $\sin\theta = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

5.5 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง ที่มีจุดปลายตกอยู่ในควอดรันต์ที่ 4

จะได้ว่า $\sin\theta = \sin(2n\pi - \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos\theta = \cos(2n\pi - \alpha) = \cos\alpha$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ต่อไปนี้

(1) $\cos\frac{19\pi}{3} = \cos(6\pi + \frac{\pi}{3})$ (2) $\sin\frac{27\pi}{4} = \sin(6\pi + \frac{3\pi}{4})$

....

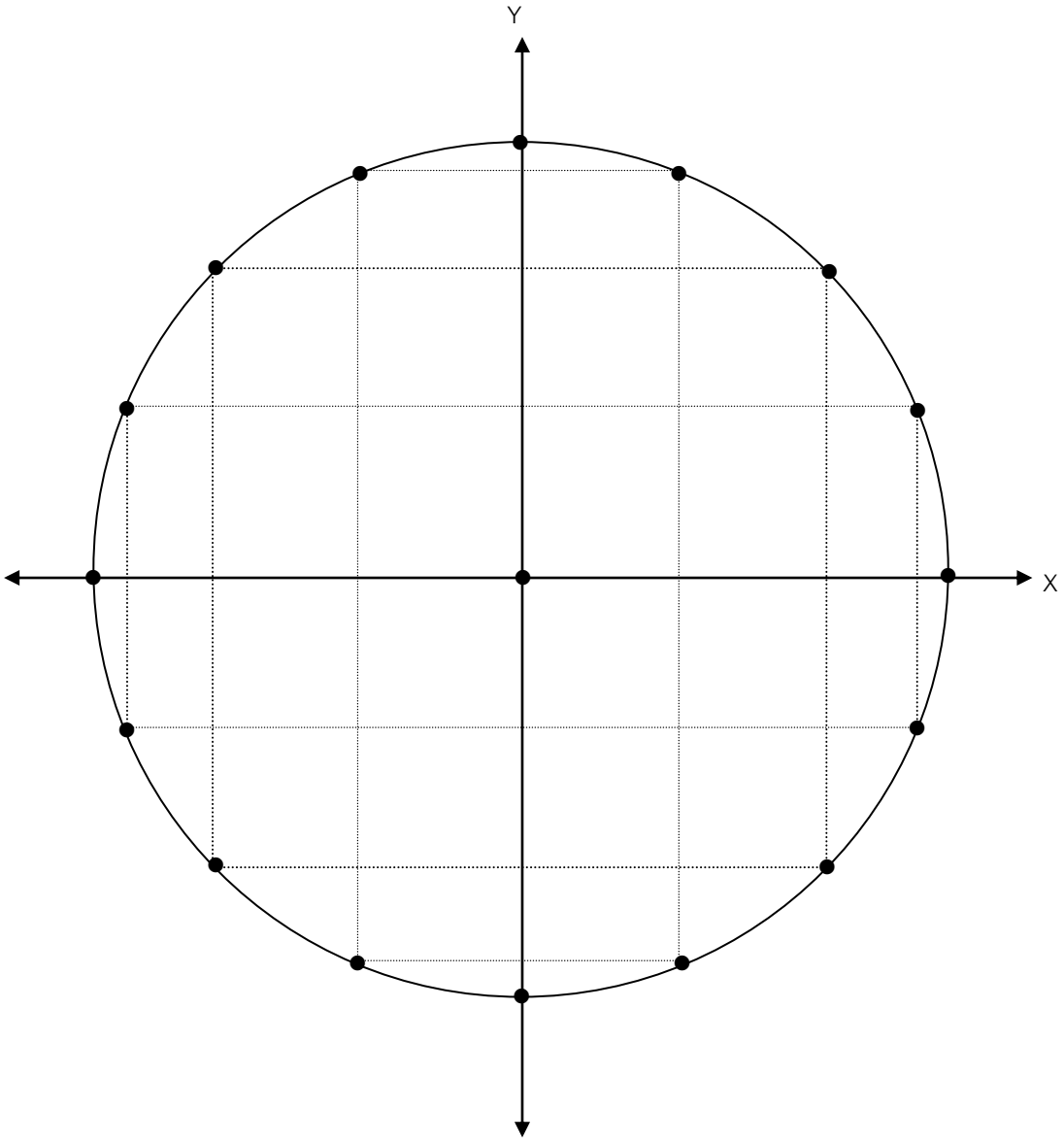
....

....

ใบกิจกรรมที่ 2.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) **บทที่** 2 **เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง จงระบุค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ที่กำหนดให้ลงในวงกลมหนึ่งหน่วย โดยเขียนในรูปของคู่อันดับ และบอกตำแหน่งความยาวส่วนโค้งแต่ละจุด ให้ถูกต้อง



ใบกิจกรรมที่ 2.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) **บทที่** 2 **เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง และบอกสูตรที่นำมาใช้ด้วย ต่อไปนี้

1.1 $\cos(-\frac{29\pi}{4})$ = ... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

1.2 $\sin(-\frac{35\pi}{6})$ = ... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

1.3 $\sin(-\frac{55\pi}{3})$ = ... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

1.4 $\cos(-\frac{67\pi}{2})$ = ... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

1.5 $\cos\frac{71\pi}{4}$ = ... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

1.6 $\sin\frac{88\pi}{3}$ = ... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

1.7 $\cos(-\frac{77\pi}{6})$ = ... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

= ..... เหตุผล.....

ใบกิจกรรมที่ 2.2.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203 **) บทที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้ง θ ต่อไปนี้

1.1 เมื่อ $\theta = \frac{3\pi}{4}$ จะได้ $\cos\frac{3\pi}{4} =$ .....

และ $\sin\frac{3\pi}{4} =$ .....

1.2 เมื่อ $\theta = \frac{5\pi}{4}$ จะได้ .....

และ .....

1.3 เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{4}$ จะได้ .....

และ .....

1.4 เมื่อ $\theta = \frac{15\pi}{4}$ จะได้ .....

และ .....

1.5 เมื่อ $\theta = \frac{35\pi}{4}$ จะได้ .....

และ .....

1.6 เมื่อ $\theta = -\frac{5\pi}{4}$ จะได้ .....

และ .....

1.7 เมื่อ $\theta = -\frac{35\pi}{4}$ จะได้ .....

และ .....

1.8 เมื่อ $\theta = -\frac{55\pi}{4}$ จะได้ .....

และ .....

ใบกิจกรรมที่ 2.2.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) **บทที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

ชื่อนักเรียน .....ชั้น.....เลขที่..... กลุ่มที่ .....

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้ง θ หน่วย ต่อไปนี้

1.1 เมื่อ $\theta = \frac{5\pi}{6}$ จะได้ $\cos\frac{5\pi}{6} =$ .....

และ $\sin\frac{5\pi}{6} =$ .....

1.2 เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{6}$ จะได้ .....

และ .....

1.3 เมื่อ $\theta = \frac{11\pi}{6}$ จะได้ .....

และ .....

1.4 เมื่อ $\theta = \frac{17\pi}{6}$ จะได้ .....

และ .....

1.5 เมื่อ $\theta = \frac{35\pi}{6}$ จะได้ .....

และ .....

1.6 เมื่อ $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ จะได้ .....

และ .....

1.7 เมื่อ $\theta = -\frac{35\pi}{6}$ จะได้ .....

และ .....

1.8 เมื่อ $\theta = -\frac{55\pi}{6}$ จะได้ .....

และ .....

ใบกิจกรรมที่ 2.2.3

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) **บทที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้ง θ หน่วย ต่อไปนี้

1.1 เมื่อ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ จะได้ $\cos\frac{2\pi}{3} =$ .....

และ $\sin\frac{2\pi}{3} =$ .....

1.2 เมื่อ $\theta = \frac{4\pi}{3}$ จะได้ .....

และ .....

1.3 เมื่อ $\theta = \frac{5\pi}{3}$ จะได้ .....

และ .....

1.4 เมื่อ $\theta = \frac{16\pi}{3}$ จะได้ .....

และ .....

1.5 เมื่อ $\theta = \frac{35\pi}{3}$ จะได้ .....

และ .....

1.6 เมื่อ $\theta = -\frac{85\pi}{3}$ จะได้ .....

และ .....

1.7 เมื่อ $\theta = -\frac{155\pi}{3}$ จะได้ .....

และ .....

1.8 เมื่อ $\theta = -\frac{212\pi}{3}$ จะได้ .....

และ .....

ใบกิจกรรมที่ 2.2.4

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) **บทที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้ง θ หน่วย ต่อไปนี้

1.1 $\cos(-\frac{29\pi}{4}) =$ .....

1.2 $\sin(-\frac{29\pi}{6}) =$ .....

1.3 $\sin(-\frac{35\pi}{3}) =$ .....

1.4 $\cos(-\frac{37\pi}{2}) =$ .....

1.5 $\cos\frac{23\pi}{4} =$ .....

1.6 $\sin\frac{38\pi}{3} =$ .....

1.7 $\sin(-\frac{\pi}{6}) =$ ..... $\sin(-\frac{\pi}{6}) =$ .....

1.8 $\sin(-\frac{2\pi}{3}) =$ ..... $\cos(-\frac{2\pi}{3}) =$ .....

1.9 $\sin(-\frac{7\pi}{4}) =$ ..... $\cos(-\frac{7\pi}{4}) =$ .....

1.10 $\sin(-\frac{4\pi}{3}) =$ ..... $\cos(-\frac{4\pi}{3}) =$ .....

1.11 $\sin(-\frac{5\pi}{6}) =$ ..... $\cos(-\frac{5\pi}{6}) =$ .....

1.12 $\sin(-\frac{3\pi}{4}) =$ ..... $\cos(-\frac{3\pi}{4}) =$ .....

1.13 $\sin(-\frac{5\pi}{4}) =$ ..... $\cos(-\frac{5\pi}{4}) =$ .....

ใบงานที่ 2.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / เขียนคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้

(1) จุดปลายของความยาวส่วนโค้งต่อไปนี้ ตกอยู่ในควอดรันต์ใด ในวงกลมหนึ่งหน่วย

1) เมื่อ $\theta = \frac{13\pi}{3}$ ตกอยู่ใน.....

2) เมื่อ $\theta = \frac{47\pi}{6}$ ตกอยู่ใน.....

3) เมื่อ $\theta = \frac{119\pi}{4}$ ตกอยู่ใน.....

4) เมื่อ $\theta = -\frac{73\pi}{3}$ ตกอยู่ใน.....

5) เมื่อ $\theta = -\frac{78\pi}{5}$ ตกอยู่ใน.....

6) เมื่อ $\theta = -\frac{87\pi}{10}$ ตกอยู่ใน.....

(2) จงหาโคออร์ดิเนต ของจุดปลายส่วนโค้งของจำนวนจริงหรือมุมที่กำหนดให้ ต่อไปนี้

1) เมื่อ $\theta = \frac{25\pi}{3}$ .....

2) เมื่อ $\theta = \frac{73\pi}{4}$ .....

3) เมื่อ $\theta = \frac{106\pi}{6}$ .....

4) เมื่อ $\theta = \frac{215\pi}{2}$ .....

5) เมื่อ $\theta = -\frac{74\pi}{3}$ .....

6) เมื่อ $\theta = -\frac{95\pi}{4}$ .....

7) เมื่อ $\theta = -\frac{149\pi}{6}$ .....

8) เมื่อ $\theta = -\frac{456\pi}{3}$ .....

(3) จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จากข้อต่อไปนี้

1) $\sin(-\frac{61\pi}{3}).\cos\frac{87\pi}{6}$ = ...

= .....

2) $\sin\frac{11\pi}{3} + \cos\frac{19\pi}{4}$ = ...

= .....

3) $\cos(-\frac{47\pi}{2}) + \sin(-\frac{43\pi}{6})$ = ...

= .....

= .....

ใบความรู้ที่ 2.3.1

วิชาคณิตศาสตร์ (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม (30 นาที)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ นอกจากจะมีฟังก์ชันไซน์และโคไซน์แล้ว ยังมีอีก 4 ฟังก์ชัน คือ

1) ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent) เขียนแทนด้วย tan
2) ฟังก์ชันเซกแคนต์ (secant) เขียนแทนด้วย sec
3) ฟังก์ชันโคเซกแคนต์ (cosecant) เขียนแทนด้วย cosec หรือ csc
4) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent) เขียนแทนด้วย cot หรือ ctn

นิยาม เมื่อ θ คือ จำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \;;\cos\theta \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \;;\cos\theta \neq 0$$

$$cot\,\theta = \frac{cos\theta}{\sin\theta} \;;\sin\theta \neq 0 \qquad cosec\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \;;\sin\theta \neq 0$$

ความสัมพันธ์เพิ่มเติมของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 4 ฟังก์ชัน

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$$

โดเมนและ เรนจ์ของฟังก์ชันทั้ง 4 ฟังก์ชัน เป็นดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน tan และ sec คือ $R - \{x\in R \mid x = \frac{(2n-1)\pi}{2}\,,\, n\in I\}$
2) โดเมนของฟังก์ชัน cot และ cosec คือ $R - \{x\in R \mid x = n\pi\,,\, n\in I\}$
3) เรนจ์ของฟังก์ชัน tan และ cot คือ R
4) เรนจ์ของฟังก์ชัน sec และ cosec คือ $R - \{x\in R \mid -1 < x < 1\}$

เอกสารฝึกหัดที่ 2.3.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 **บทที่** 2 **เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนในกลุ่ม ช่วยกันเติมคำตอบลงในช่องว่าง ที่กำหนดให้ถูกต้อง

กำหนด จำนวนจริง θ	ค่าของ $\sin\theta$	ค่าของ $\cos\theta$	ค่าของ $\tan\theta$	ค่าของ $\csc\theta$	ค่าของ $\sec\theta$	ค่าของ $\cot\theta$
$\theta = 0$						
$\theta = \frac{\pi}{2}$						
$\theta = \pi$						
$\theta = \frac{3\pi}{2}$						
$\theta = \frac{\pi}{3}$						
$\theta = \frac{2\pi}{3}$						
$\theta = \frac{4\pi}{3}$						
$\theta = \frac{5\pi}{3}$						
$\theta = \frac{\pi}{4}$						
$\theta = \frac{3\pi}{4}$						
$\theta = \frac{5\pi}{4}$						
$\theta = \frac{7\pi}{4}$						
$\theta = \frac{\pi}{6}$						
$\theta = \frac{5\pi}{6}$						
$\theta = \frac{7\pi}{6}$						

เอกสารฝึกทักษะที่ 2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 30203 บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

(1) $\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$ = ...

= .....

(2) $\tan(-\frac{11\pi}{6}) - \csc\frac{7\pi}{6}$ = ...

= .....

= .....

(3) $\sec\frac{8\pi}{3} - \csc\frac{21\pi}{6}$ = ...

= .....

= .....

(4) $\csc\frac{33\pi}{3} + \tan\frac{27\pi}{4}$ = ...

= .....

= .....

(5) $\sec(-\frac{35\pi}{4}) + \csc(-\frac{51\pi}{6})$ = ...

= .....

= .....

(6) $\cot^2\frac{17\pi}{6} - \tan^2\frac{32\pi}{3}$ = ...

= .....

= .....

= .....

ใบกิจกรรมที่ 2.3.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บท ที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1.1 $\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$ = ...

= .....

1.2 $\tan\frac{11\pi}{6} - \csc\frac{7\pi}{6}$ = ...

= .....

1.3 $\sec\frac{8\pi}{3} - \csc\frac{21\pi}{6}$ = ...

= .....

1.4 $\csc\frac{33\pi}{3} + \tan\frac{27\pi}{4}$ = ...

= .....

= .....

1.5 $\sec\frac{35\pi}{4} + \csc\frac{51\pi}{6}$ = ...

= .....

= .....

1.6 $\cot^2\frac{17\pi}{6} - \tan^2\frac{32\pi}{3}$ = ...

= .....

= .....

ใบงานที่ 2.3

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203 **)** **บทที่** 2 **เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ**

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / เขียนคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้

(1) จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1.1 $\sin\frac{3\pi}{4}\csc\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{3}\sec\frac{2\pi}{3}$

= .....

= .....

1.2 $\tan\frac{5\pi}{6}\csc\frac{\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{4}$ = ...

= .....

= .....

1.3 $\sin\frac{5\pi}{4}\sec\frac{3\pi}{4}-\cot\frac{2\pi}{3}\csc\frac{11\pi}{6}$

= .....

= .....

1.4 $\cos\frac{13\pi}{3}\csc\frac{13\pi}{6}+\tan\frac{15\pi}{4}\cot\frac{21\pi}{4}$

= .....

= .....

1.5 $\sec\frac{33\pi}{4}\csc\frac{29\pi}{4}+\cos\frac{52\pi}{3}\sin\frac{61\pi}{6}$

= .....

= .....

1.6 $\sin^2\frac{4\pi}{3}\cot^2\frac{17\pi}{4}-\cos^2\frac{25\pi}{6}\tan^2\frac{22\pi}{3}$

= .....

= .....

ใบความรู้ที่ 2.4.1

วิชาคณิตศาสตร์ (ค 30203) **บทที่** 2 **เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม**

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม

(1) **มุมและการวัดมุม**

- **มุมเกิดจาก** ส่วนของเส้นตรงของเส้นที่แยกออกจากกัน ส่วนของเส้นตรง 2 เส้น นั้น เส้นหนึ่งเรียกว่า ด้านเริ่มต้นของมุม อีกเส้นหนึ่งเรียกว่า ด้านสิ้นสุดของมุม
- **การวัดมุม** วัดได้ 2 แบบ คือ แบบทวนเข็มนาฬิกา (กำหนดให้ค่าของมุมเป็น +) และการวัดแบบตามเข็มนาฬิกา (กำหนดค่าของมุมเป็น -)
- **หน่วยของมุม** มี 2 แบบ คือ
  - หน่วยของมุมที่เป็นองศา ($^\circ$) โดยถือว่า มุมที่เกิด จากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบหนึ่งรอบ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อย คือ ลิปดา ($'$) และ ฟิลิปดา ($''$) โดยที่ $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$
  - หน่วยของมุมที่เป็นเรเดียน (radian) คือ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมวงนั้น จะถือว่ามีขนาดเท่ากับ 1 เรเดียน
  - เนื่องจากความยาวเส้นรอบวงของวกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย ยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้น มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว $2\pi r$ หน่วย จึงมีขนาดเท่ากับ $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ เรเดียน
- **การเปรียบเทียบมุม** ทั้ง 2 แบบ

$$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \approx 0.01745 \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา} \approx 57^\circ 18'$$

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน $\frac{1}{2}$ เรเดียน เป็น องศา และเปลี่ยน 75 องศา เป็น เรเดียน

วิธีทำ $\frac{1}{2}$ เรเดียน $= \frac{1}{2}\times\frac{180}{\pi} \approx \frac{1}{2}\times 57^\circ 18'$

$\approx 28^\circ 39'$

75 องศา $= 75\times\frac{\pi}{180} \approx 75\times 0.01745$

$= \frac{5\pi}{12} \approx 1.30875$

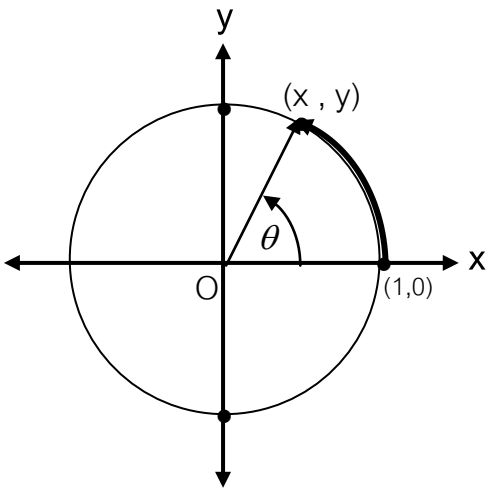
ใบความรู้ที่ 2.4.2

วิชาคณิตศาสตร์ (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

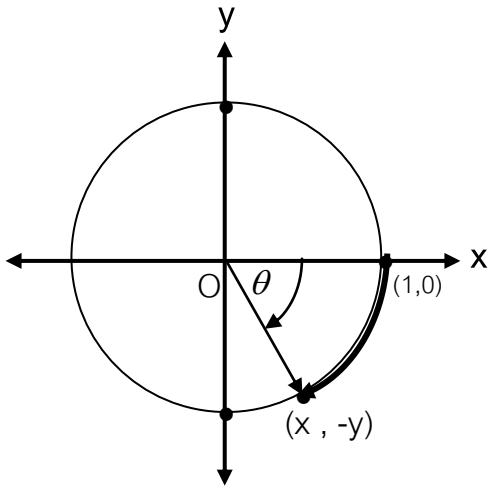
คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม (20 นาที)

(2) **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม**

- เมื่อจุดยอดมุมของมุม ๆ หนึ่งอยู่ที่จุด (0 , 0) ด้านเริ่มต้นทาบแกน x ทางบวก จะเรียกมุมนั้นว่า มุมในตำแหน่งมาตรฐาน
- ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด θ เรเดียน จึงยาวเท่ากับ θ หน่วย
- เมื่อกำหนดมุมขนาด θ เรเดียนให้หนึ่งมุม แล้วจุดสิ้นสุดของด้านสิ้นสุดของมุม จะเป็นจุดเดียวกันกับ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ด้วย
- ไม่ว่าจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมหรือความยาวส่วนโค้ง ของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่รองรับมุมนั้น ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนเหล่านั้น จึงมีค่า เท่ากัน



$\theta > 0$



$\theta < 0$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ต่อไปนี้

(1) $\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ)$

$= -\cos 45^\circ = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan(-210^\circ) =$ .....

= .....

(4) $\sec(-405^\circ) =$ .....

= .....

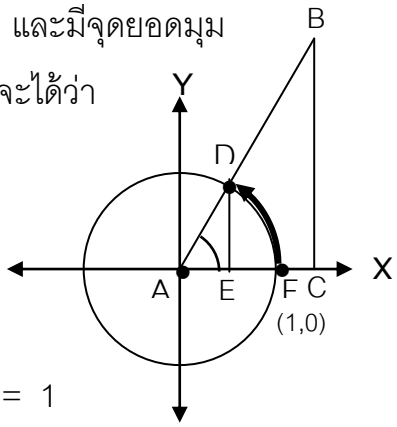
ใบความรู้ที่ 2.4.3

วิชาคณิตศาสตร์ (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม (20 นาที)

(3) **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก**

- รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่สร้างขึ้น บนวงกลมหนึ่งหนึ่งหน่วย และมีจุดยอดมุม อยู่ที่จุด (0 , 0) มีขนาดเท่ากับ θ เรเดียน หรือ θ องศา จะได้ว่า



sin A = sin (ความยาวส่วนโค้ง FD) = DE

cos A = cos (ความยาวส่วนโค้ง FD) = AE

เนื่องจาก $\triangle AED \approx \triangle ACB$

จะได้ว่า $\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$ และ $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$ แต่ AD = 1

ดังนั้น $DE = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ และ $AE = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

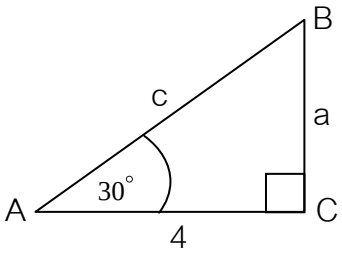
นั่นคือ $\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

ตัวอย่าง กำหนด Δ มุมฉาก ABC โดยมี มุม C เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 4 หน่วย และ มุม A = 30 องศา จงหา ความยาวด้าน AB และ BC

วิธีทำ สร้างรูปประกอบ



เนื่องจาก $\cos 30^\circ = \frac{b}{c}$ และ $\tan 30^\circ = \frac{a}{b}$

ดังนั้น $c = \frac{b}{\cos 30^\circ}$ $a = b \tan 30^\circ$

$= \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ $= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

≈ 4.618 ≈ 2.309

ใบกิจกรรมที่ 2.4.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บท ที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงเปลี่ยนมุมเรเดียนต่อไปนี้ เป็นมุมองศา

1.1 2 เรเดียน = ...

1.2 $\frac{1}{3}$ เรเดียน = ...

1.3 $\frac{1}{4}$ เรเดียน = ...

1.4 $\frac{2}{3}$ เรเดียน = ...

1.5 $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน = ...

1.6 $\frac{17\pi}{6}$ เรเดียน = ...

1.7 $\frac{22\pi}{5}$ เรเดียน = ...

(2) จงเปลี่ยนมุมองศา ต่อไปนี้ เป็นมุมเรเดียน

2.1 15 องศา = ...

2.2 75 องศา = ...

2.3 105 องศา = ...

2.4 120 องศา = ...

2.5 135 องศา = ...

2.6 150 องศา = ...

2.7 210 องศา = ...

2.8 225 องศา = ...

2.9 240 องศา = ...

2.10 300 องศา = ...

2.11 315 องศา = ...

2.12 330 องศา = ...

ใบกิจกรรมที่ 2.4.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203 **) บท ที่** 2 **เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ**

ชื่อนักเรียน .....ชั้น.....เลขที่..... กลุ่มที่ .....

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ต่อไปนี้

1.1 $\sin 135^\circ =$ .....

= .....

1.2 $\cos 120^\circ =$ .....

= .....

1.3 $\tan 150^\circ =$ .....

= .....

= .....

1.4 $\sec 225^\circ =$ .....

= .....

= .....

1.5 $\csc 240^\circ =$ .....

= .....

= .....

1.6 $\cot 300^\circ =$ .....

= .....

= .....

1.7 $\sin(-210^\circ) =$ .....

= .....

= .....

1.8 $\cos(-315^\circ) =$ .....

= .....

= .....

1.9 $\tan(-450^\circ) =$ .....

= .....

= .....

1.10 $\sec(-240^\circ) =$ .....

= .....

= .....

1.11 $\csc(-480^\circ) =$ .....

= .....

= .....

1.12 $\cot(-510^\circ) =$ .....

= .....

= .....

ใบกิจกรรมที่ 2.4.3

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บท ที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงหาความยาวของด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เมื่อกำหนด มุมและด้านบางด้านมาให้ จากข้อต่อไปนี้

1.1 มีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A = 45 องศา และด้าน AC ยาว 3 หน่วย

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 มีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A = 60 องศา และด้าน AB ยาว 8 หน่วย

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) กำหนดให้ $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ จงหา $\sin\theta$ และ $\tan\theta$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 2.4

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203 **)** **บทที่** 2 **เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ**

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / เขียนคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้

(1) จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุม 850 องศา

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก ด้าน AC = 1 ด้าน AB = $\sqrt{3}$ จงหามุมและด้านที่เหลือ

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

(3) กำหนดให้ $\tan A = 2 \ , \ 0^\circ < A < 90^\circ$ จงหา ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม A

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบความรู้ที่ 2.5.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม (15 นาที)

การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากหัวข้อที่กล่าวมาแล้ว ได้ทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมบางมุมมาบ้างแล้ว และทราบด้วยว่า ไม่ว่าจะกำหนดจำนวนจริง θ (หรือมุม) ใด ๆ ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นมาให้ จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมนั้นได้เสมอ

สำหรับค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง เป็นค่าที่หาจากจำนวนจริง หรือมุมตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือ 0^0 ถึง 90^0 ถ้ามุมหรือจำนวนจริงที่มากกว่านี้ ให้ใช้วิธีการหาค่าฟังก์ชันที่เป็นจุดสมมาตรของมุมหรือจำนวนจริงตั้งแต่ 0^0 ถึง 90^0 หรือ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degree	Radians	Sine	tangent	cotangent	cosine		
27° $00'$	0.4712	.4540	.5095	1.9626	.8910	63° $00'$	1.0996
$10'$	0.4741	.4566	.5132	1.9486	.8897	$50'$	1.0966
$20'$	0.4771	.4592	.5169	1.9347	.8884	$40'$	1.0937
$30'$	0.4800	.4617	.5206	1.9210	.8870	$30'$	1.0908
$40'$	0.4829	.4643	.5243	1.9074	.8857	$20'$	1.0879
$50'$	0.4858	.4669	.5280	1.8940	.8843	$10'$	1.0850
28° $00'$	0.4887	.4695	.5317	1.8807	.8829	62° $00'$	1.0821
$10'$	0.4916	.4720	.5354	1.8676	.8816	$50'$	1.0792
$20'$	0.4945	.4746	.5392	1.8546	.8802	$40'$	1.0763
$30'$	0.4974	.4772	.5430	1.8418	.8788	$30'$	1.0734
$40'$	0.5003	.4797	.5467	1.8291	.8774	$20'$	1.0705
$50'$	0.5032	.4823	.5505	1.8165	.8760	$10'$	1.0676
		cosine	cotangent	tangent	Sine	Radians	Degree

ใบความรู้ที่ 2.5.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง เป็นค่าที่หาจากมุมหรือจำนวนจริงตั้งแต่ 0^0 ถึง 90^0 หรือ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ถ้ามุมหรือจำนวนจริงที่มากกว่านี้ ให้ใช้วิธีการหาค่าฟังก์ชันที่เป็นจุดสมมาตรของมุมหรือจำนวนจริงตั้งแต่ 0^0 ถึง 90^0 หรือ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงใช้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง มาหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $\cos 125^\circ$

วิธีทำ $\cos 125^\circ = \cos(180^\circ - 55^\circ)$

$= -\cos 55^\circ$

เปิดตาราง จะได้ $= -0.5736$

(2) $\sin 226^\circ$

วิธีทำ $\sin 226^\circ = \sin(180^\circ + 46^\circ)$

$= -\sin 46^\circ$

เปิดตารางจะได้

(3) $\tan(-306^\circ)$

วิธีทำ $\tan(-306^\circ) = -\tan 306^\circ$

$= -\tan(360^\circ - 54^\circ)$

$= -(-\tan 54^\circ) = 1.3764$

(4) $\sin 100^\circ\ 20'$

วิธีทำ $\sin 100^\circ\ 20' = \sin(180^\circ - 79^\circ\ 40')$

$= \sin 79^\circ\ 40'$

$= 0.9838$

ตัวอย่างที่ 2 จงใช้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง มาหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $\cos 77^\circ\ 44'$

วิธีทำ หาโดยวิธีเทียบสัดส่วน ดังนี้

$\cos 77^\circ\ 00'$	0.2250	
$\cos 77^\circ\ 44'$		- x
$\cos 78^\circ\ 00'$	0.2079	- 0.0171

ซ้าย: $+ 44'$, $+ 60'$

$\therefore \quad \frac{x}{0.0171} = \frac{44}{60}$

$x = 0.0125$

ดังนั้น $\cos 77^\circ\ 44' = 0.2250 - 0.0125$

$= 0.2125$

(2) $\sin 32^\circ\ 28'$

วิธีทำ หาโดยวิธีเทียบสัดส่วน ดังนี้

$\sin 32^\circ\ 00'$	0.5299	
$\sin 32^\circ\ 28'$		+ x
$\sin 33^\circ\ 00'$	0.5446	+ 0.0147

ซ้าย: $+ 28'$, $+ 60'$

$\therefore \quad \frac{x}{0.0147} = \frac{28}{60}$

$x = 0.0069$

ดังนั้น $\sin 32^\circ\ 28' = 0.5299 + 0.0069$

$= 0.5368$

เอกสารฝึกหัดที่ 2.5.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) **บทที่** 2 **เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

คำสั่ง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่าง ให้ถูกต้อง

(1) จงใช้ค่าจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 $\cos 11^\circ 10'$ =.....

1.2 $\sin 16^\circ 20'$ =.....

1.3 $\cos 32^\circ 30'$ =.....

1.4 $\sin 40^\circ 50'$ =.....

1.5 $\tan 31^\circ 20'$ =.....

1.6 $\cot 44^\circ 40'$ =.....

1.7 $\sin 0.5091$ =.....

1.8 $\sin 1.1868$ =.....

1.9 $\cos 0.0785$ =.....

1.10 $\cos 1.4515$ =.....

1.11 $\tan 0.1338$ =.....

1.12 $\cot 0.1658$ =.....

(2) จงใช้ค่าจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในการประยุกต์ ตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 $\cos 135^\circ 20'$ =.....

=.....

=.....

2.2 $\cos 241^\circ 30'$ =.....

=.....

=.....

2.3 $\sin 131^\circ 40'$ =.....

=.....

=.....

2.4 $\sin 278^\circ 10'$ =.....

=.....

=.....

2.5 $\sin 98^\circ 50'$ =.....

=.....

=.....

2.6 $\tan 120^\circ 50'$ =.....

=.....

=.....

2.7 $\tan 248^\circ 30'$ =.....

=.....

=.....

2.8 $\cot 134^\circ 20'$ =.....

=.....

=.....

ใบกิจกรรมที่ 2.5.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ตาราง

1.1 $\cos 31^\circ 20'$ =..... 1.2 $\sin 48^\circ 50'$ =.....

1.3 $\tan 73^\circ 50'$ =..... 1.4 $\sin 148^\circ 30'$ =.....

1.5 $\cos 330^\circ 10'$ =..... 1.6 $\tan 448^\circ 40'$ =.....

1.7 $\cos(-62^\circ 20')$ =..... 1.8 $\sin(-84^\circ 50')$ =.....

1.9 $\cos 0.3840$ =..... 1.10 $\tan 4.3546$ =.....

(2) จงหาค่าของ θ เมื่อ $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ เมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันดังนี้

2.1 $\cos\theta = 0.9194$ θ =..... 2.2 $\sin\theta = 0.8732$ θ =.....

2.3 $\cos\theta = 0.7660$ θ =..... 2.4 $\tan\theta = 3.4124$ θ =.....

2.5 $\cos\theta = 0.8631$ θ =..... 2.6 $\sin\theta = 0.3090$ θ =.....

2.7 $\tan\theta = 0.5280$ θ =..... 2.8 $\tan\theta = 1.0913$ θ =.....

2.9 $\cos\theta = 0.5592$ θ =..... 2.10 $\sin\theta = 0.1190$ θ =.....

(3) จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ตาราง

3.1 $\cos 42^\circ 24'$ =..... 3.2 $\sin 78^\circ 45'$ =.....

....

....

....

....

....

....

....

....

ใบงานที่ 2.5

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / เขียนคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้

(1) จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยใช้ตาราง

1.1 $\sin 28^\circ 30' =$ ..... 1.2 $\sin 100^\circ 20' =$ .....

1.3 $\tan 66^\circ 10' =$ ..... 1.4 $\cos 136^\circ 50' =$ .....

1.5 $\cos 44^\circ 40' =$ ..... 1.6 $\tan 243^\circ 30' =$ .....

(2) จงหาค่ามุม A เมื่อ $0^\circ \le A \le 180^\circ$ เมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติมาให้

2.1 $\cos A = 0.9872$ 2.2 $\sin A = 0.9520$

....

2.3 $\tan A = 0.5206$ 2.4 $\sin A = -0.4540$

....

2.5 $\cos A = -0.8760$ 2.6 $\tan A = -0.6830$

....

(3) จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ โดยอาศัยค่าจาตาราง

3.1 $\cos 36^\circ 24'$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

3.2 $\tan 48^\circ 33'$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

ใบความรู้ที่ 2.7.1

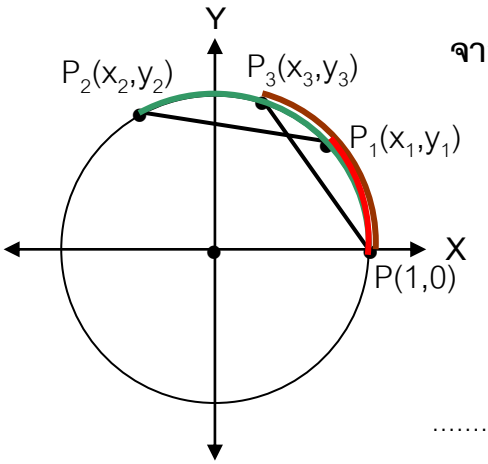
วิชาคณิตศาสตร์ (**ค** 30203)

บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม (15 นาที)

(1) การหาความสัมพันธ์ของ $\cos(A-B)$ และ $\cos(A+B)$



จากรูป กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วยบนระนาบพิกัดฉาก

และให้ $PP_2 = A \ , \ PP_1 = B$

ดังนั้น $PP_3 = P_1P_2 = A-B$

และจะได้ว่า $|PP_3| = |P_1P_2|$

$$\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ดังนั้น $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

ถ้าลองนำค่าของ $\cos(A-B)$ ไปหาค่าของ $\cos(A+B)$ จะได้ดังนี้

$\cos(A+B) = \cos[A-(-B)]$

$=$ .....

$=$ .....

สรุปเป็นสูตรได้ว่า

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

ใบความรู้ที่ 2.7.2

วิชาคณิตศาสตร์ (**ค** 30203)

บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม (20 นาที)

(2) การหาความสัมพันธ์ของ $\sin(A+B)$ และ $\sin(A-B)$

เนื่องจาก $\sin(A+B) = \cos[\frac{\pi}{2}-(A+B)] = \cos[(\frac{\pi}{2}-A)-B]$

= .....

= .....

= .....

ดังนั้น $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

ในลักษณะเดียวกัน จะได้ว่า $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(3) การหาความสัมพันธ์ของ $\tan(A+B)$ และ $\tan(A-B)$

$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$ = ...

= .....

= .....

= .....

= .....

ดังนั้น $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$

ในลักษณะเดียวกัน จะได้ว่า $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$

ใบงานที่ 2.8

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้ ให้ถูกต้อง

(1) มุมที่มีหน่วยเป็นองศา ที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่าย เช่น ……..……..

2) มุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน ที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่าย เช่น .....……..……...…

(3) จงแยกมุมที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปผลบวก หรือผลต่างของมุม 2 มุม ที่สามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่าย โดยใช้มุมในข้อ (1) หรือ ข้อ (2)

กำหนดมุมที่จะหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	แยกมุมให้อยู่ในรูปผลต่างของมุมที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่าย	แยกมุมให้อยู่ในรูปผลบวกของมุมที่หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่าย
15°	$45^\circ - 30^\circ$	–
75°	–	$45^\circ + 30^\circ$
105°		
135°		
165°		
390°		
435°		
$\frac{\pi}{12}$		
$\frac{5\pi}{12}$		
$\frac{7\pi}{12}$		

ใบงานที่ 2.8.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ ในรูปแบบของ $\cos(A-B)$ และ $\cos(A+B)$

1) $\cos 15^\circ$ = ...

.....

.....

.....

2) $\cos 165^\circ$ =.....

.....

.....

.....

3) $\cos(-105^\circ)$ = ...

.....

.....

.....

.....

4) $\cos\frac{17\pi}{12}$ =.....

.....

.....

.....

.....

5) ให้ $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos B = -\frac{5}{13}$ โดยที่ $0^\circ < A < 90^\circ$, $90^\circ < B < 180^\circ$ จงหา

5.1 $\cos(A-B)$ =.....

=.....

=.....

=.....

5.2 $\cos(A+B)$ =.....

=.....

=.....

=.....

ใบงานที่ 2.8.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ ในรูปแบบของ $\sin(A+B)$ และ $\sin(A-B)$

1) $\sin 15^\circ$ = ...

.....

.....

.....

.....

2) $\sin 165^\circ$ =.....

.....

.....

.....

.....

3) $\sin(-105^\circ)$ = ...

.....

.....

.....

.....

4) $\sin\frac{11\pi}{12}$ =.....

.....

.....

.....

.....

5) ให้ $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = -\frac{4}{5}$ โดยที่ $0 < A < 90^\circ$, $90^\circ < B < 180^\circ$

จงหา $\sin(A+B)$, $\sin(A-B)$

5.1 $\sin(A+B)$ =.....

=.....

=.....

=.....

5.2 $\sin(A-B)$ =.....

=.....

=.....

=.....

ใบงานที่ 2.8.3

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ ในรูปแบบของ $\tan(A+B)$ และ $\tan(A-B)$

1) $\tan 105^\circ$ = ... 2) $\tan(-195^\circ)$=.....

....

....

....

3) $\tan\frac{11\pi}{12}$ = ... 4) $\tan(-\frac{17\pi}{12})$=.....

....

....

....

5) ให้ $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = -\frac{4}{5}$ โดยที่ $0 < A < 90^\circ, 90^\circ < B < 180^\circ$

จงหา $\tan(A+B)$, $\tan(A-B)$

5.1 $\tan(A+B)$ =.....

=.....

=.....

=.....

5.2 $\tan(A-B)$ =.....

=.....

=.....

=.....

ใบงานที่ 2.9

บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ให้นักเรียนช่วยกันเติมคำตอบลงในช่องว่าง ให้ถูกต้อง

(1) เนื่องจาก $\sin(A+B) =$ ..... - - - - - - - - (1)

$\sin(A-B) =$ ..... - - - - - - - - - (2)

นำ $(1)+(2)$ จะได้

$\sin(A+B)+\sin(A-B) =$ [.....] + [.....]

= .....

= .....

สรุปได้ว่า $\sin(A+B)+\sin(A-B) =$ .....

และนำ $(1)-(2)$ จะได้

$\sin(A+B)-\sin(A-B) =$ [.....] – [.....]

= .....

= .....

สรุปได้ว่า $\sin(A+B)-\sin(A-B) =$ .....

(2) เนื่องจาก $\cos(A+B) =$ ..... - - - - - - - - (1)

$\cos(A-B) =$ ..... - - - - - - - - - (2)

นำ $(1)+(2)$ จะได้

$\cos(A+B)+\cos(A-B) =$ [.....] + [.....]

= .....

= .....

สรุปได้ว่า $\cos(A+B)+\cos(A-B) =$ .....

และนำ $(1)-(2)$ จะได้

$\cos(A+B)-\cos(A-B) =$ [.....] – [.....]

= .....

= .....

สรุปได้ว่า $\cos(A+B)-\cos(A-B) =$ .....

ใบความรู้ที่ 2.10

ให้นักเรียนร่วมกันแสดงวิธีการหาความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ลงในช่องว่างต่อไปนี้

(1) จงแสดงว่า $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin(A+B)-\sin(A-B) =$ ..... (1)

ถ้าให้ $A+B=\alpha$ ----------(2) และ $A-B=\beta$ ----------(3)

(2) + (3) จะได้ว่า ..... หรือ .....

(2) – (3) จะได้ว่า ..... หรือ .....

แทนค่า A และ B ลงใน (1)

จาก (1) $\sin(A+B)-\sin(A-B) =$ .....

จะได้ว่า ..... = ... *********

(2) จงแสดงว่า $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos(A+B)+\cos(A-B) =$ ..... (1)

ถ้าให้ $A+B=\alpha$ ----------(2) และ $A-B=\beta$ ----------(3)

(2) + (3) จะได้ว่า ..... หรือ .....

(2) – (3) จะได้ว่า ..... หรือ .....

แทนค่า A และ B ลงใน (1)

จาก (1) $\cos(A+B)+\cos(A-B) =$ .....

จะได้ว่า ..... = ... *********

(3) จงแสดงว่า $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos(A+B)-\cos(A-B) =$ ..... (1)

ถ้าให้ $A+B=\alpha$ ----------(2) และ $A-B=\beta$ ----------(3)

(2) + (3) จะได้ว่า ..... หรือ .....

(2) – (3) จะได้ว่า ..... หรือ .....

แทนค่า A และ B ลงใน (1)จาก (1) $\cos(A+B)-\cos(A-B) =$ .....

จะได้ว่า ..... = ... *********

ใบงาน

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1.1) $6\sin 75^\circ \cos 15^\circ =$.....

.....

.....

.....

.....

1.2) $4\cos 15^\circ \cos 105^\circ =$.....

.....

.....

.....

.....

1.3) $6\sin 165^\circ \sin 435^\circ =$.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.4) $-8\cos 225^\circ \sin 255^\circ =$.....

.....

.....

.....

.....

.....

จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

(1) $\sin 165^\circ + \sin 255^\circ =$.....

.....

.....

.....

.....

(2) $\sin 375^\circ - \sin 795^\circ =$.....

.....

.....

.....

.....

(3) $\cos 345^\circ + \cos 285^\circ =$.....

.....

.....

.....

.....

(4) $\cos 75^\circ - \cos 195^\circ =$.....

.....

.....

.....

.....

ใบกิจกรรม

วิชาคณิตศาสตร์ (ค 42201)

บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (30 นาที)

(1) ให้ $\tan A = -\frac{3}{4}$ จงหาค่าของ sin2A cos2A และ tan2A เมื่อ $90^\circ < A < 180^\circ$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

(2) ให้ $\sin A = \frac{4}{5}$ จงหาค่าของ sin3A cos3A และ tan3A เมื่อ $0 < A < 90^\circ$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

(3) ให้ $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ จงหาค่าของ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ และ $\tan\frac{A}{2}$ เมื่อ $90^\circ < A < 180^\circ$

2.1 $\sin\frac{A}{2}$ =.....

.....

2.2 $\cos\frac{A}{2}$ =.....

.....

2.3 $\tan\frac{A}{2}$ =.....

.....

ใบงานที่ 2.7.1

บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / เขียนคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยอาศัย ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมหรือจำนวนจริง $A \pm B$

1) $\cos 255^\circ$ =.....
=.....
=.....
=.....

2) $\sin(-375^\circ)$ =.....
=.....
=.....
=.....

3) $\cos \frac{7\pi}{12}$ =.....
=.....
=.....
=.....

4) $\tan(-\frac{17\pi}{12})$ =.....
=.....
=.....
=.....

5) $\cos(-435^\circ)$=.....
=.....
=.....
=.....

6) $\cos(-\frac{29\pi}{12})$ =.....
=.....
=.....
=.....

7) ให้ $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ และ $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ โดยที่ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ จงหา $\tan(\alpha \pm \beta)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบงาน

บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / เขียนคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้

(1) $4\sin 75^\circ \sin 15^\circ$ =.....

=.....

=.....

=.....

(2) $6\cos 15^\circ \sin 165^\circ$ =.....

=.....

=.....

=.....

(3) $\cos 255^\circ \cos 15^\circ$ =.....

=.....

=.....

=.....

(4) $-4\sin 105^\circ \sin 75^\circ$ =.....

=.....

=.....

=.....

(5) $3\sin 255^\circ \cos 435^\circ$ =.....

=.....

=.....

=.....

(6) $-3\cos 255^\circ \sin 435^\circ$ =.....

=.....

=.....

=.....

(7) ให้ $\cos A = -\frac{3}{5}$, $90^\circ < A < 180^\circ$ จงหา sin , cos , tan ของมุม 2A , 3A , $\frac{A}{2}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบความรู้ 2.11

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

นิยาม 1. ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ x = sin y และโดเมน คือ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ นิยมเขียนแทนด้วย y = arcsin x หรือ $y = \sin^{-1} x$

2. ฟังก์ชัน arccosine คือเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ x = cos y และโดเมน คือ $y \in [0, \pi]$ นิยมเขียนแทนด้วย y = arccos x หรือ $y = \cos^{-1} x$

3. ฟังก์ชัน arctan คือ เซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ x = tan y และโดเมน คือ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ นิยมเขียนแทนด้วย y = arctan x หรือ $y = \tan^{-1} x$

ข้อควรทราบ 1. อินเวอร์สของฟังก์ชัน จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชันเดิมเป็นฟังก์ชัน 1 -1

2. เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1 -1 ดังนั้นอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันอินเวอร์ส

1) $\sin(\sin^{-1} x) = x$ áÅÐ $\sin^{-1}(\sin x) = x$
2) $\cos(\cos^{-1} x) = x$ áÅÐ $\cos^{-1}(\cos x) = x$
3) $\tan(\tan^{-1} x) = x$ áÅÐ $\tan^{-1}(\tan x) = x$
4) $\csc(\csc^{-1} x) = x$ áÅÐ $\csc^{-1}(\csc x) = x$
5) $\sec(\sec^{-1} x) = x$ áÅÐ $\sec^{-1}(\sec x) = x$
6) $\cot(\cot^{-1} x) = x$ áÅÐ $\cot^{-1}(\cot x) = x$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของฟังก์ชันอินเวอร์ส จากข้อต่อไปนี้

(1) $y = \sin^{-1}\frac{1}{2}$

ก็ต่อเมื่อ $\sin y = \frac{1}{2}$

แต่ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $y = \frac{\pi}{6}$

(2) $y = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

ก็ต่อเมื่อ $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

แต่ $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $y = \frac{\pi}{4}$

(3) $y = \sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

ก็ต่อเมื่อ $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

แต่ $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $y = -\frac{\pi}{3}$

(4) $y = \tan^{-1}(-1)$

ก็ต่อเมื่อ $\tan y = -1$

แต่ $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

ดังนั้น $y = -\frac{\pi}{4}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของฟังก์ชันอินเวอร์ส จากข้อต่อไปนี้

(1) $\sin(\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2})$

ให้ $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = A$

จะได้ว่า $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin A$

ดังนั้น $A = \frac{\pi}{4}$

แทนค่า $\sin(\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos[\sin^{-1}(-1)]$

ให้ $\sin^{-1}(-1) = A$

จะได้ว่า $-1 = \sin A$

ดังนั้น $A = -\frac{\pi}{2}$

แทนค่า $\cos[\sin^{-1}(-1)] = \cos(-\frac{\pi}{2})$

$= 0$

(3) $\sin[2\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$

ให้ $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = B$

จะได้ว่า $-\frac{1}{2} = \cos B$

ดังนั้น $B = \frac{2\pi}{3}$

แทนค่า $\sin[2\cos^{-1}(-\frac{1}{2})] = \sin 2(\frac{2\pi}{3})$

$= \sin\frac{4\pi}{3}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\tan(2\tan^{-1}\sqrt{3})$

ให้ $\tan^{-1}\sqrt{3} = B$

จะได้ว่า $\sqrt{3} = \tan B$

ดังนั้น $B = \frac{\pi}{3}$

แทนค่า $\tan(2\tan^{-1}\sqrt{3}) = \tan 2(\frac{\pi}{3})$

$= \tan\frac{2\pi}{3}$

$= -\sqrt{3}$

ใบกิจกรรมที่

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (25 นาที)

จงหาค่าของฟังก์ชันอินเวอร์ส ของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\sin^{-1} 1$

2) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$

3) $\tan^{-1}(-1)$

4) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

5) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$

7) $\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

8) $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

ใบกิจกรรมที่ 2.8.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (25 นาที)

จงหาค่าของฟังก์ชันอินเวอร์ส ของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\sin[\sin^{-1}(-\frac{1}{2})]$ =..... 2) $\cos[\cos^{-1}(-1)]$ =.....

.....

3) $\cos(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$ =..... 4) $\sin[\cos^{-1}1]$ =.....

.....

.....

7) $\sin^{-1}[\frac{1}{2}\cos\pi]$ =..... 8) $\cos^{-1}[\sin(-\frac{2\pi}{3})]$ =.....

.....

.....

9) $\sin[2\tan^{-1}\sqrt{3}]$ =..... 10) $\cos[2\sin^{-1}(-1)]$ =.....

.....

.....

.....

11) $\sin[\sin^{-1}\frac{1}{2}-\cos^{-1}\frac{1}{3}]$ 12) $\cos^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}(-\frac{1}{3})$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 2.8

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / เขียนคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้

จงหาค่าของฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

1) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=$.....

.....

2) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})=$.....

.....

3) $\tan^{-1}\sqrt{3}=$.....

.....

4) $\sin^{-1}[\sin\frac{\pi}{3}]=$.....

.....

.....

7) $\sin^2[\cos^{-1}\frac{1}{2}]=$.....

.....

.....

.....

8) $\cos^{-1}[\cos\frac{3\pi}{4}]=$.....

.....

.....

.....

9) $\cos[2\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}]=$.....

.....

.....

.....

.....

10) $\cos^{-1}[\sin\frac{7\pi}{6}]=$.....

.....

.....

.....

.....

11) $\sin[3\sin^{-1}\frac{1}{2}]=$.....

.....

.....

.....

.....

12) $\tan[\frac{1}{2}\cos^{-1}(-1)]=$.....

.....

.....

.....

.....

ใบความรู้ที่ 2.9.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 42201) บทที่ 2 เรื่อง เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม (15 นาที)

(1) **เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ** คือ รูปแบบของสมการตรีโกณมิติ ที่เป็นจริงทุกค่าของมุมหรือจำนวนจริงที่ปรากฏในฟังก์ชันนั้น

หลักในการพิสูจน์เอกลักษณ์

1. พิสูจน์ข้างใดข้างหนึ่งให้ตรงกับอีกข้างหนึ่ง (ให้เลือกเอาด้านที่ซับซ้อนมาพิสูจน์)
2. ควรจัดทุกฟังก์ชัน ให้มาอยู่ในรูปของ sin หรือ cos ก่อน
3. นำเอกลักษณ์ที่พิสูจน์ไว้แล้วมาเลือกใช้
4. อาศัยหลักการแยกตัวประกอบ เช่น $น^2 - ล^2 = (น-ล)(น+ล)$

   $น^3 - ล^3 = (น-ล)(น^2+นล+ล^2)$ $น^3 + ล^3 = (น+ล)(น^2-นล+ล^2)$
5. เอกลักษณ์พื้นฐาน ที่นำมาช่วยอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์ คือ

   1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ หรือ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

   2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ หรือ $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

   3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ หรือ $\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

   4) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ หรือ $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

   5) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ หรือ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

   6) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

   7) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

   8) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

   9) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

   10) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

ใบความรู้ที่ 2.9.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 42201) บทที่ 2 เรื่อง เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาที่กำหนดให้ เป็นกลุ่ม (15 นาที)

(2) **สมการตรีโกณมิติ** คือ สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ และจะเป็นจริงสำหรับบางค่าของมุมหรือจำนวนจริงที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันนั้น ซึ่งมีคำตอบอยู่ 2 แบบ คือ

1) คำตอบเฉพาะ หมายถึง คำตอบของสมการภายใต้เอกภพสัมพัทธ์ที่มีขอบเขตจำกัด
2) คำตอบทั่วไป หมายถึง คำตอบของสมการภายใต้เอกภพสัมพัทธ์ R หรือ สมการที่ไม่ได้กำหนดเอกภพสัมพัทธ์มาให้

คำตอบทั่วไปของสมการตรีโกณมิติ จะกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ เป็น R จากสูตร

ถ้าให้ θ คือ มุมหรือจำนวนจริงที่ต้องการหาในสมการตรีโกณมิติ

และให้ α คือ คำตอบที่เล็กที่สุดที่เป็นบวกของสมการ และ $n \in I$ แล้ว จะได้ว่า

1. คำตอบทั่วไปของฟังก์ชัน sin และ cosec คือ $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$
2. คำตอบทั่วไปของฟังก์ชัน cos และ sec คือ $\theta = 2n\pi \pm \alpha$
3. คำตอบทั่วไปของฟังก์ชัน tan และ cot คือ $\theta = n\pi + \alpha$

เนื่องจาก ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมหรือจำนวนจริงใด ๆ อาจจะซ้ำกันได้ ดังนั้น การหาคำตอบของสมการตรีโกณมิติถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดว่าคำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง แล้ว คำตอบที่ควรตอบคำตอบในรูปทั่วไป

เอกสารฝึกทักษะ

คำชี้แจง จงพิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

1) $\csc\theta\cos\theta = \cot\theta$

วิธีทำ..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

2) $1 + \tan^2(-\theta) = \sec^2\theta$

วิธีทำ..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

3) $\cos\theta(\tan\theta+\cot\theta) = \csc\theta$

วิธีทำ..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

4) $\tan\theta\cot\theta - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

วิธีทำ..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

5) $(\sec\theta-1)(\sec\theta+1) = \tan^2\theta$

วิธีทำ..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

เอกสารฝึกทักษะ

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

1) $1-\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = \sin\theta$

<u>วิธีทำ</u>..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

2) $\cot\alpha - tan\alpha = 2\cot 2\alpha$

<u>วิธีทำ</u>..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

3) $\frac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \cot\theta$

<u>วิธีทำ</u>..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

4) $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$

<u>วิธีทำ</u>..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

..... [เหตุผล.....]

ใบกิจกรรม

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (25 นาที)

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

(1) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

(2) $\tan^2 A \cos^2 A \csc^2 A = 1$

(3) $(\cos A - \sin A)^2 = 1 - \sin 2A$

(4) $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + \sin 2A$

(5) $(\tan A + \cot A)^2 = \sec^2 A + \csc^2 A$

(6) $\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1$

(7) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(8) $\sin x \cos x = \sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x$

ใบกิจกรรม

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (25 นาที)

จงแก้สมการตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $2\sin\theta = \sqrt{3}$ เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $\cos^2\theta = \cos\theta$ เมื่อ $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $2\cos^2\theta - \sin\theta + 1 = 0$ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบความรู้ที่ 2.13

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง กฎของไซน์และโคไซน์

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและปฏิบัติกิจกรรมที่กำหนดให้ พร้อมรายงาน (15 นาที)

(1) **กฎของโคไซน์** เป็นกฎที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำหนดด้าน 2 ด้านและมุมระหว่างด้านทั้งสองมาให้ สามารถใช้กฎของโคไซน์หาความยาวด้านและมุมที่เหลือได้ หรือ ถ้ากำหนดด้านทั้งสามด้านมาให้ สามารถใช้กฎของโคไซน์หามุมทั้งสามของสามเหลี่ยมใด ๆ ได้

กฎของโคไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a ,b , c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ตามลำดับ จะได้

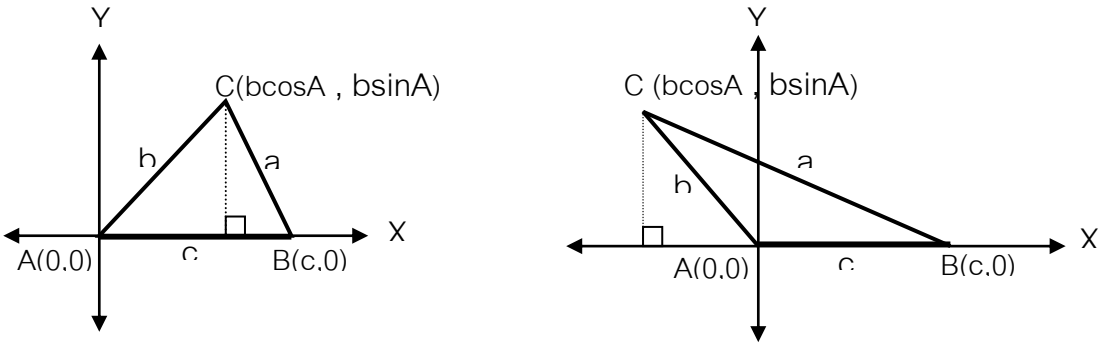
1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

การหากฎของโคไซน์ (ในกรณีที่มุม A อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน)

กำหนด Δ ABC ที่สร้างบนระนาบแกนพิกัดฉากและมีพิกัดต่าง ๆ ตามรูป



หาความยาว a **หรือ** | BC | **จากรูป จะได้ว่า**

$$a = |BC| = \sqrt{(b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2}$$

$$a^2 = b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$$

$$a^2 = b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

ใบความรู้ที่ 2.13.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง กฎของไซน์และโคไซน์

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและปฏิบัติกิจกรรมที่กำหนดให้ พร้อมรายงาน (15 นาที)

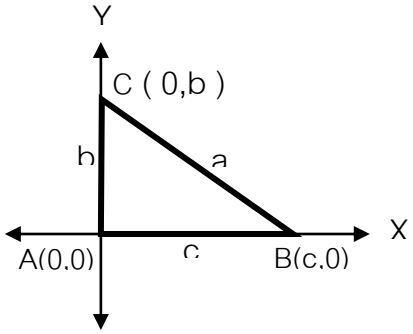
(2) **กฎของไซน์** เป็นกฎที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เมื่อ กำหนดมุม 2 มุม และด้านที่อยู่ระหว่างมุมทั้งสองมาให้ สามารถใช้กฎของไซน์ หามุมและด้านที่เหลือ รวมทั้งใช้หาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนั้นได้

กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a ,b , c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ตามลำดับ จะได้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{หรือ} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

การหากฎของไซน์

กำหนด Δ ABC ที่สร้างบนระนาบแกนพิกัดฉากและมีพิกัดต่าง ๆ ตามรูป



จากรูป $\sin A = \sin 90^\circ = 1$

และจะได้ว่า $\sin B = \frac{b}{a}$ และ $\sin C = \frac{c}{a}$

หรือ $\frac{\sin B}{b} = \frac{1}{a}$ และ $\frac{\sin C}{c} = \frac{1}{a}$

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$ และ $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ หรือ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

การหาพื้นที่สามเหลี่ยมใด ๆ โดยใช้กฎของไซน์ (กรณีมุม A อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน)

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times$ สูง $\times$ ความยาวของฐาน $= \frac{1}{2}(b \sin A)(c)$

$= \frac{1}{2} bc \sin A$

ถ้ามุม B และ C อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน จะได้สูตรว่า

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$

ใบกิจกรรมที่ 2.13.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง กฎของโคไซน์

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (25 นาที)

(1) จงหาความยาวด้าน a เมื่อ b = 2 , c = $\sqrt{2}$ และ A = 45°

.....

.....

.....

.....

(2) จงหาความยาวด้าน c เมื่อ a = 8 , b =10 และ C = 120°

.....

.....

.....

.....

(3) จงหาขนาดของมุม B เมื่อ a = 3 , b = 4 และ c = 5

.....

.....

.....

.....

(4) จงหาขนาดของมุมทั้ง 3 เมื่อ a = 8 , b = 6 และ c = 6

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 2.13.4

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (30203) **บทที่ 2 เรื่อง กฎของไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (20 นาที)

(1) กำหนด $\triangle$ ABC จงหา ด้าน a และ b เมื่อ $c = \sqrt{2}$, $A = 60^\circ$ และ $B = 45^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

(2) กำหนด $\triangle$ ABC จงหาด้านและมุมที่เหลือ เมื่อ $C = 60^\circ$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 3\sqrt{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

(3) จงหาพื้นที่ Δ ABC เมื่อกำหนดให้ $B = 60^\circ$, $a = 14$, $c = 12$

.....

.....

.....

(4) จงหาพื้นที่ Δ ABC เมื่อกำหนดให้ $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 2.13.5

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง กฎของไซน์และโคไซน์

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / เขียนคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้

(1) จงหา a ถ้า b = 20 , c =30 , A = 60°

.....

.....

.....

(2) จงหา B ถ้า a = 25 ,b = 75 , c= 60

.....

.....

.....

(3) จงหา b เมื่อ C = 45°, B = 60° , c = $\sqrt{6}$

.....

.....

.....

4) จงหา b , c เมื่อ B = 105°, C = 60° , a = 4

.....

.....

.....

5) จงหาพื้นที่ Δ ABC เมื่อกำหนดสิ่งต่อไปนี้มาให้

5.1) $A=60^\circ, b=3, c=5$ 5.2) $B=105^\circ, a=\sqrt{3}-1, c=2\sqrt{2}$

.....

.....

.....

ใบความรู้ที่ 2.14

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง การหาระยะทางและความสูง

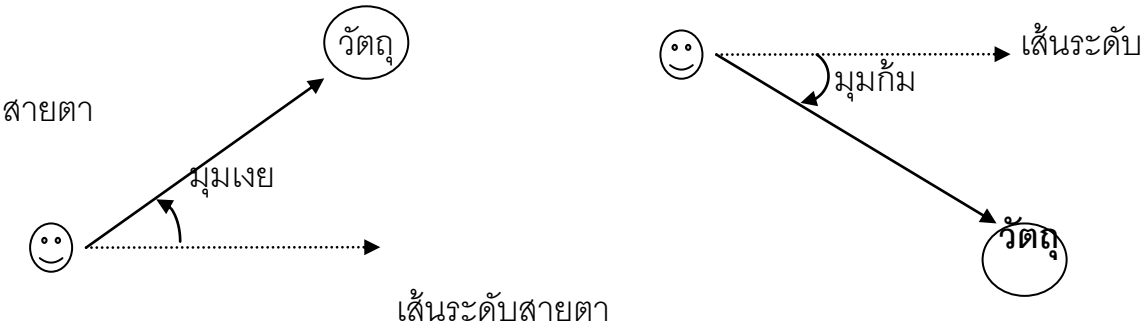
<u>คำชี้แจง</u> ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและปฏิบัติกิจกรรมที่กำหนดให้ พร้อมรายงาน (30 นาที)

ระยะทางและความสูง

ในการวัดระยะทางและความสูงของสิ่งใดก็ตาม บางครั้งจะใช้เครื่องมือสำหรับวัดโดยตรงไม่ได้ เช่น การวัดความสูงของภูเขา หรือการวัดระยะระหว่างสถานที่สองแห่งที่มีเนินเขากั้นกลาง เป็นต้น ปัญหาจากการวัดเช่นนี้ จำเป็นต้องใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของไซน์และโคไซน์ ความรู้เกี่ยวกับมุมก้ม มุมเงย มาช่วยในการหาคำตอบ

มุมเงย เกิดจาก เส้นระดับสายตากับแนวมอง เมื่อวัตถุที่มองอยู่สูงกว่าระดับสายตา

มุมก้ม เกิดจาก เส้นระดับสายตากับแนวมอง เมื่อวัตถุที่มองอยู่ต่ำกว่าระดับสายตา



ให้นักเรียนช่วยกัน สร้างรูป และใช้กฎของไซน์และโคไซน์ มาแก้โจทย์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) ชายคนหนึ่งเดินทางออกจากจุดเริ่มต้น ไปในทิศ 120 องศา เป็นระยะทาง 10 ก.ม. แล้วเดินทางต่อไปในทิศตะวันออก เป็นระยะทาง 12 กิโลเมตร จงหาว่า จุดสุดท้ายที่เขาอยู่นี้ เขาอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น เท่าไร และ อยู่ในทิศทางใดของจุดเริ่มต้น

<u>วิธีทำ</u> .....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 2.14.1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) บทที่ 2 เรื่อง ระยะทางและความสูง

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้เป็นกลุ่ม พร้อมกับนำเสนอผลงาน (25 นาที)

จงใช้กฎของไซน์ มาแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง และความสูง ต่อไปนี้

(1) ณ จุดหนึ่งบนพื้นราบ ชายคนหนึ่งมองเห็นหลอดไฟกระพิบบนเสาส่งโทรศัพท์ เป็นมุมเงย 30 องศา เมื่อเขาเดินตรงเข้าไปหาเสานั้นเป็นระยะ 50 เมตร แล้วมองดูหลอดไฟกระพิบเห็นเป็นมุมเงย 60 องศา จงหาว่า เสาส่งโทรศัพท์นี้สูงเท่าไร

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) เสาธงต้นหนึ่งถูกพายุพัดหัก ยอดเสาหักค้างงอลงมาจดพื้นทำมุมก้มกับพื้นราบ 45 องศา ปลายยอดเสาอยู่ห่างจากโคนเสา 30 ฟุต จงหาว่า เสาธงนี้สูงเท่าไร

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 2.14.2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 30203) **บทที่** 2 **เรื่อง การหาระยะทางและความสูง**

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / หาคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้แต่ละข้อ

1) สมชายสูง 175 ซม. ยืนอยู่ ณ จุดหนึ่ง พบว่า เมื่อเขามองไปยังยอดเขาลูกหนึ่ง จะมองเห็นเป็นมุมเงย 15° แต่ถ้าเขาเดินตามแนวพื้นราบเข้าไปหาเขาลูกนั้นเป็นระยะ 1 ก.ม. แล้วมองขึ้นไปบนยอดเขาที่เดิมอีก พบว่าเป็นมุมเงย 60° จงหาความสูงของเขาลูกนี้

<u>วิธีทำ</u> .....

.....

.....

.....

.....

2) ก. และ ข. ยืนอยู่บนพื้นราบห่างกัน 50 เมตร และยืนอยู่ในแนวเดียวกันกับตึกหลังหนึ่ง ถ้า ก. และ ข. มองไปบนยอดตึกที่จุดเดียวกัน พบว่าเป็นมุมเงย 45° และ 30° ตามลำดับ จงหาว่า ทั้งสองคน ยืนอยู่ห่างจากตึกคนละเท่าไร

<u>วิธีทำ</u> .....

.....

.....

.....

.....

3) นาย A ยืนอยู่บนประภาคารสูง 80 เมตรจากระดับน้ำทะเล มองเห็นเรือ 2 ลำในทะเล ซึ่งอยู่ในแนวเดียวกันกับประภาคาร พบว่าเป็นมุมก้ม 60° และ 45° ตามลำดับ จงหาระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำ

<u>วิธีทำ</u> .....

.....

.....

.....

. .....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ (หลังเรียน) รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค30203)
บทที่ 2 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์

คำสั่ง ให้นักเรียนเลือกกากบาท (x) เพียงข้อละ 1 ตัวเลือก ลงในกระดาษคำตอบ

(1) จุดปลายของความยาวส่วนโค้ง $\frac{11\pi}{4}$ บนวงกลมหนึ่งหน่วย จะตกอยู่ในควอดรันต์ใด

ก. ควอดรันต์ที่ 1 ข. ควอดรันต์ที่ 2 ค. ควอดรันต์ที่ 3 ง. ควอดรันต์ที่ 4

(2) ข้อใดคือค่าของ $\sin\frac{4\pi}{3}$

ก. $\frac{1}{2}$ ข. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ค. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ง. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

(3) ข้อใดคือค่าของ $\cos\frac{19\pi}{6}$

ก. $\frac{1}{2}$ ข. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ค. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ง. $-\frac{1}{2}$

(4) ข้อใดคือค่าของ $\tan(-300^\circ)$

ก. $\sqrt{3}$ ข. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ค. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ง. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) ข้อใดคือค่าของ $\sin 120^\circ \tan 210^\circ + \cos 180^\circ \cot 90^\circ$

ก. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ข. $\frac{3}{2}$ ค. $-\frac{1}{2}$ ง. $\frac{1}{2}$

(6) $\sin(90^0 + x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. sin x ข. cos x ค. - sin x ง. - cos x

(7) $\sin 75^0 + \sin 15^0$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ข. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ค. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ง. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(8) ถ้า $\cos A = -\frac{1}{2}$ เมื่อ $90^0 < A < 180^0$ แล้ว $\sin 2A$ จะเท่ากับข้อใด

ก. $-\frac{1}{2}$ ข. $\frac{1}{2}$ ค. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ง. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(9) ข้อใดคือค่าของ $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$

ก. $\frac{\pi}{6}$ ข. $-\frac{\pi}{3}$ ค. $\frac{\pi}{4}$ ง. $\frac{\pi}{3}$

(9) ข้อใดคือค่าของ $\sin[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$

ก. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ข. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ค. $-\frac{1}{2}$ ง. $\frac{1}{2}$

(10) ข้อใดคือเซตคำตอบของสมการ $2\sin^2 x - 1 = 0$ เมื่อ $x \in [0, \pi]$

ก. $\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \}$ ข. $\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \}$ ค. $\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \}$ ง. ไม่มีข้อถูก

(11) กำหนด Δ ABC มีด้าน $a = 3\sqrt{3}$, $A = 30^0$, $C = 120^0$ แล้ว b จะยาวเท่าไร

ก. $3\sqrt{3}$ ข. $4\sqrt{2}$ ค. 9 ง. 12

(12) ชายคนหนึ่งขับรถจากจุด ก. ลงไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 6 ก.ม. ต่อจากนั้นขับรถต่อไปในทิศ 210^0 ถึงจุด เป็นระยะทาง 10 ก.ม. จงหาระยะห่างระหว่างจุด ก. และจุด ข.

ก. 8 ก.ม. ข. 12 ก.ม. ค. 14 ก.ม. ง. 16 ก.ม.