

---

# ลำดับ และอนุกรม

---

## สารบัญ

ลำดับ.....	1
ลำดับเลขคณิต.....	6
ตัวกลางเลขคณิต.....	16
ลำดับเรขาคณิต.....	18
ตัวกลางเรขาคณิต.....	27
อนุกรม.....	30
สัญลักษณ์ซีกมา.....	33
อนุกรมเลขคณิต.....	37
อนุกรมเรขาคณิต.....	46

## ลำดับ

ลำดับ คือ การนำสิ่งต่างๆ (ซึ่งมักจะเป็นตัวเลข) มาเรียงอย่างมีลำดับ เช่น 8, 3, 4, 1, 3, 12

โดยเราจะเรียกแต่ละตัวในลำดับว่า “พจน์”

เช่น ลำดับ 5, 2, 10, 12, 8 จะมี พจน์ที่ 1 คือ 5 , พจน์ที่ 2 คือ 2 , พจน์ที่ 4 คือ 12 เป็นต้น

และ เรายินยใช้ตัวแปร  $a$  แทนแต่ละพจน์ในลำดับ โดย พจน์ที่ 1 จะแทนด้วย  $a_1$

พจน์ที่ 2 จะแทนด้วย  $a_2$

...

พจน์ที่  $n$  จะแทนด้วย  $a_n$

เช่น ลำดับ 5, 7, 9, 11, ..., 41 จะมี  $a_1 = 5$  ,  $a_2 = 7$  ,  $a_5 = 13$  ,  $a_8 = 19$

บางที เราอาจเจอลำดับที่มีพจน์ “ต่อไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด” เช่น 3, 5, 7, 9, 11, ...

ลำดับพวกนี้ จะมี “...” ต่อท้ายเพื่อบอกว่ามีพจน์ต่อท้ายไปเรื่อยๆ

เราจะเรียกลำดับประเภทนี้ว่า “ลำดับอนันต์”

แต่ถ้าในลำดับ มีจำนวนพจน์ เป็นจำนวนจำกัด เราจะเรียกว่าเป็น “ลำดับจำกัด”

เช่น 1, 2, 3, 4, ... เป็นลำดับอนันต์

3, 5, 7 เป็นลำดับจำกัด

2, 4, 6, ..., 200000 เป็นลำดับจำกัด

ในกรณีที่ตัวเลขในลำดับเรียงอย่างมีระเบียบ เรายังจะสามารถเดา “สูตร” สำหรับหาพจน์ที่เราต้องการได้

โดยเราจะเรียกสูตรดังกล่าวว่า “สูตรพจน์ทั่วไป”

เช่น ลำดับ 5, 7, 9, 11, ..., 41 จะมีสูตรพจน์ทั่วไป คือ  $a_n = 2n + 3$

ถ้ามีสูตรนี้ เราจะหาพจน์ไหนที่ต้องการก็ได้ เช่น  $a_5 = (2)(5) + 3 = 13$       $a_8 = (2)(8) + 3 = 19$

$$a_1 = (2)(1) + 3 = 5 \quad a_2 = (2)(2) + 3 = 7$$

ในการทำงานกลับกัน เราใช้สูตรพจน์ทั่วไป หาว่าตัวเลขที่กำหนด เป็นพจน์ที่เท่าไรได้ โดยการแก้สมการย้อนกลับ

เช่น ลำดับ  $a_n = 2n + 3$  ถ้าอยากรู้ว่า 29 เป็นพจน์ที่เท่าไร ให้แก้สมการ  $29 = 2n + 3$

$$26 = 2n$$

$$13 = n$$

ถ้าอยากรู้ว่า 19 เป็นพจน์ที่เท่าไร ให้แก้สมการ  $19 = 2n + 3$

$$16 = 2n$$

$$8 = n$$

ถ้าอยากรู้ว่าลำดับ 5, 7, 9, 11, ..., 41 มีกี่พจน์ ให้แก้สมการ  $41 = 2n + 3$

$$38 = 2n$$

$$19 = n$$

## 2 ลำดับ และอนุกรม

บางทีเรานิยมเขียนลำดับเป็น เซตของคู่อันดับ  $(x, y)$  โดยให้  $x$  แทน “ลำดับที่” และให้  $y$  แทน “พจน์”  
เช่น ลำดับ  $2, 4, 6, 8, \dots$  สามารถเขียนอีกแบบได้เป็น  $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$   
หรือเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้เป็น  $\{(x, y) \mid x \in I^+ \wedge y = 2x\}$   
ดังนั้น บางทีเราอาจกล่าวว่า “ลำดับ คือ ความสัมพันธ์ที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก” ก็ได้

### แบบฝึกหัด

1. จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ ซึ่งมีสูตรพจน์ทั่วไปดังต่อไปนี้

1.  $a_n = 2n + 1$

2.  $a_n = 3n - 1$

3.  $a_n = n^2$

4.  $a_n = (n + 1)^2$

5.  $a_n = 2^n$

6.  $a_n = 10^n$

2. ลำดับหนึ่ง มีสูตรพจน์ทั่วไป คือ  $a_n = 5n - 3$  จงหาว่า 32 เป็นพจน์ที่เท่าไรของลำดับนี้

3. ลำดับหนึ่ง มีสูตรพจน์ทั่วไป คือ  $a_n = 4n + 3$  จงหาว่าลำดับนี้มีบางพจน์เท่ากับ 29 หรือไม่

4. ถ้าพจน์สุดท้ายของลำดับ  $a_n = 3n + 2$  มีค่า 56 จงหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์

5. จงหาว่า พจน์สุดท้ายที่มีค่าน้อยกว่า 100 ของลำดับ  $a_n = 2n + 5$  คือพจน์ที่เท่าใด
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
6. ลำดับหนึ่ง มีสูตรพจน์ทั่วไป คือ  $a_n = n(n + 1)$  จงหาว่า ลำดับนี้มีกี่พจน์ที่มีค่าน้อยกว่า 110
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
7. จงหาว่าลำดับ  $a_n = 35 - 2n$  มีกี่พจน์ที่มากกว่า 0
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
8. จงหาว่าใน 20 พจน์แรกของลำดับ  $a_n = n + 2$  มีกี่พจน์ที่เป็นเลขคู่
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
9. จงหาว่าใน 30 พจน์แรกของลำดับ  $a_n = (-1)^n$  มีกี่พจน์ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

10. จงหาว่าใน 40 พจน์แรกของลำดับ  $a_n = n + (-1)^n$  มีกี่พจน์ที่เป็นเลขคู่

11. จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1. 1, 2, 3, 4, ...

2. 3, 3, 3, 3, ...

3. 1, 4, 9, 16, ...

4. 4, 9, 16, 25, ...

5. 2, 4, 8, 16, ...

6. -1, 1, -1, 1, ...

7. 10, 100, 1000, 10000, ...

8. 9, 99, 999, 9999, ...

12. ถ้า  $a_n = \frac{2-(-1)^n n}{2n+3}$  แล้วข้อใดถูก [O-NET 57/19]

1.  $a_1 = \frac{1}{5}$

2.  $a_2 = \frac{4}{7}$

3.  $a_3 = -\frac{1}{9}$

4.  $a_4 = \frac{2}{11}$

5.  $a_5 = \frac{7}{13}$

13. ใน 40 พจน์แรกของลำดับ  $a_n = 3 + (-1)^n$  มีกี่พจน์ ที่มีค่าเท่ากับพจน์ที่ 40 [O-NET 53/21]

14. ถ้า  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$  และ  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$  แล้ว  $a_{11}$  เท่ากับเท่าใด  
[O-NET 56/22]

## ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่เพิ่มหรือลดอย่างคงที่ โดยการบวก

ตัวอย่างลำดับเลขคณิต เช่น  $5, 8, 11, 14, 17$                        $1, 1.5, 2, 2.5, 3$   
 $4, 1, -2, -5, -8$      $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$

แต่  $2, 4, 8, 16$  ไม่เป็นลำดับเลขคณิต เพราะบวกเพิ่มไม่คงที่

เราเรียกค่าคงที่ ที่นำมาบวก ว่า “ผลต่างร่วม” ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $d$

เช่น  $5, 8, 11, 14 \rightarrow d = 3$      $1, 3, 5, 7 \rightarrow d = 2$   
 $5, 3, 1, -1 \rightarrow d = -2$      $5, 5, 5, 5 \rightarrow d = 0$   
 $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \rightarrow d = \frac{1}{2}$

จะเห็นว่า ถ้าเอาสองพจน์ที่อยู่ติดกันในลำดับเลขคณิต มาลบกัน (พจน์ขวา ลบ พจน์ซ้าย) จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ  $d$  เสมอ

เช่น ลำดับเลขคณิต  $5, 8, 11, 14, \dots$  จะเห็นว่า  $8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3 = d$

ตัวอย่าง ถ้าลำดับ  $x, 2x - 1, x + 8$  เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงหาผลต่างร่วมของลำดับนี้

วิธีทำ เนื่องจากลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ดังนั้น พจน์ที่อยู่ติดกัน ลบกัน ต้องเท่ากันทุกคู่

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad (2x - 1) - (x) &= (x + 8) - (2x - 1) \\ 2x - 1 - x &= x + 8 - 2x + 1 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

แทนค่า  $x$  ลงในลำดับ จะได้  $5, 9, 13$

ดังนั้น ผลต่างร่วม ( $d$ ) =  $9 - 5 = 4$

#

ตัวอย่าง ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรก เท่ากับ 9 และ 15 ตามลำดับ จงหาสามพจน์แรก  
ของลำดับนี้

วิธีทำ ข้อนี้ เราจะใช้วิธีสมมติ  $x$  สร้างสมการ แล้วแก้สมการ

ในโจทย์ประเภทนี้ เรายินยมใช้เทคนิค “สมมติให้  $x$  แทนพจน์กลาง” เพื่อความสะดวกในการตัดเลข

แต่ละพจน์ในลำดับเลขคณิต ต้องห่างกัน  $d$  ดังนั้น จะได้สามพจน์นี้ คือ  $x - d, x, x + d$

$$\begin{aligned} \text{สามพจน์แรก บวกกันได้ 9 ดังนั้น} \quad (x - d) + (x) + (x + d) &= 9 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

แทนค่า  $x$  จะได้ สามพจน์นี้ คือ  $3 - d, 3, 3 + d$

$$\begin{aligned} \text{สามพจน์นี้ คูณกันได้ 15 ดังนั้น} \quad (3 - d)(3)(3 + d) &= 15 \\ 9 - d^2 &= 5 \\ 4 &= d^2 \\ 2, -2 &= d \end{aligned}$$

แทนค่า  $d = 2$  จะได้ สามพจน์นี้ คือ  $1, 3, 5$

$d = -2$  จะได้ สามพจน์นี้ คือ  $5, 3, 1$  (มี 2 คำตอบ)

#



สูตรแรกที่ต้องจำให้ขึ้นใจ คือ สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ตัวอย่าง จงหาพจน์ที่ 21 ของลำดับเลขคณิต 100, 97, 94, 91, ..., 10 และจงหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์

วิธีทำ จากลำดับที่ให้ จะเห็นว่า  $a_1 = 100$  และ  $d = -3$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ } a_n &= 100 + (n - 1)(-3) \\ &= 100 + -3n + 3 \\ &= -3n + 103 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น พจน์ที่ } 21 = a_{21} = -3(21) + 103 = -63 + 103 = 40$$

$$\begin{aligned} \text{และ ถ้าต้องการหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์ ต้องแก้สมการ } 10 &= -3n + 103 \\ 3n &= 93 \\ n &= 31 \end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับนี้มี 31 พจน์

#

ตัวอย่าง ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_4 = 20$  และ  $a_{10} = 38$  จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

วิธีทำ จากสูตร  $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\begin{aligned} \text{แทน } n = 4 \text{ จะได้ } a_4 &= a_1 + (4 - 1)d \\ 20 &= a_1 + 3d \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{แทน } n = 10 \text{ จะได้ } a_{10} &= a_1 + (10 - 1)d \\ 38 &= a_1 + 9d \end{aligned} \quad (2)$$

$$(2) - (1): \quad 38 - 20 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 3d)$$

$$18 = a_1 + 9d - a_1 - 3d$$

$$18 = 6d$$

$$d = 3$$

$$\text{แทน } d = 3 \text{ ใน (1)} \quad 20 = a_1 + 3(3)$$

$$a_1 = 20 - 9 = 11$$

ดังนั้น จะได้สูตรพจน์ทั่วไปคือ  $a_n = 11 + (n - 1)(3)$

$$= 11 + 3n - 3 = 8 + 3n$$

#

ตัวอย่าง จงหาว่าตั้งแต่ 100 ถึง 500 มีจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว ทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ ตัวแรกตั้งแต่ 100 ขึ้นไป ที่หารด้วย 7 ลงตัว คือ 105 ตัวถัดไปคือ 112, 119, 126, ...

และตัวสุดท้ายที่หารด้วย 7 ลงตัว คือ 497

คำตอบของข้อนี้ คือ “จำนวนพจน์” ในลำดับ 105, 112, 119, 126, ..., 497

จะเห็นว่าลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต มี  $a_1 = 105$  และ  $d = 7$

ดังนั้น จะได้สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ  $a_n = 105 + (n - 1)(7)$

$$= 105 + 7n - 7$$

$$= 98 + 7n$$

เราสามารถหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์ โดยการหาว่าตัวเลขสุดท้ายของลำดับนี้ คือพจน์ที่เท่าไร

โดยการแทน  $a_n$  ด้วย 497 แล้วแก้หาค่า  $n$  :  $497 = 98 + 7n$

$$399 = 7n$$

$$n = \frac{399}{7} = 57$$

จะได้ว่า 497 คือพจน์ที่ 57 ดังนั้น ลำดับนี้มี 57 พจน์

นั่นคือ ตั้งแต่ 100 ถึง 500 มีจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัวทั้งสิ้น 57 จำนวน

#

### แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่า ลำดับในข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับเลขคณิต พร้อมทั้งหาผลต่างร่วม

1. 3, 5, 7, 9, ...

2. 1, 4, 9, 16, ...

3. 3, 6, 9, 12, ...

4.  $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$

5. 3, 1, -1, -3, ...

6. -3, 5, -7, 9, ...

7. 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, ...

8.  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \dots$

9. 2, 4, 8, 16, ...

10. 1, 1, 3, 3, 5, 5, ...

11.  $x, x + 2, x + 4, \dots$

12.  $a, 2a, 3a, 4a, \dots$

2. ถ้าลำดับ  $x + 1, 2x + 1, 4x - 2$  เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงหาค่า  $x$

3. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวก 3 พจน์แรก เท่ากับ 3 และผลคูณ 2 พจน์แรก เท่ากับ  $-2$  จงหาผลต่างร่วม
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวก 5 พจน์แรก เท่ากับ 20 ถ้าพจน์ที่สี่ มากกว่าพจน์ที่สอง อยู่ 6 จงหาพจน์ที่ 4
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
5. จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต  $3, 5, 7, 9, \dots$
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
6. จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต  $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, \dots$
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
7. จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

8. จงหาพจน์ที่ 30 ของลำดับ 1, 4, 7, 10, ...

9. จงหาว่าลำดับ 2, 6, 10, ... , 42 มีกี่พจน์

10. จงหาว่าลำดับ 100, 97, 94, 91, ... มีกี่พจน์ ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

11. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_1 = 5$  และ  $a_5 = 13$  จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

12. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_3 = 11$  และ  $a_8 = 21$  จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

13. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_2 = 1$  และ  $a_5 = 10$  จงหาค่าของ  $a_8$

14. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_5 - a_2 = 30$  จงหาค่าผลต่างร่วม

15. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_{15} - a_4 = 22$  ถ้า  $a_{10} = 21$  จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับชุดนี้

16. จงหาว่า ระหว่าง 200 กับ 300 มีกี่จำนวนที่

1. หารด้วย 3 ลงตัว

2. หารด้วย 5 ลงตัว

3. หารด้วย 3 และ 5 ลงตัว

4. หารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว

5. หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

6. หารด้วย 5 เหลือเศษ 2

17. จงหาว่า ตั้งแต่ 150 ถึง 450 มีจำนวนที่หลักหน่วยลงท้ายด้วย 8 ทั้งหมดกี่จำนวน

18. นายดำกู้เงินมาจำนวนหนึ่ง โดยจ่ายคืนเดือนแรก 200 บาท และในเดือนถัดไป นายดำต้องจ่ายเพิ่มขึ้นทุกๆเดือน โดยจะต้องจ่ายคืนมากขึ้นเดือนละ 50 บาท หลังจากชำระหมด พบว่าในเดือนสุดท้าย นายดำจ่ายคืน 950 บาท จงหาว่านายดำ จ่ายเงินคืนทั้งสิ้น กี่เดือน

19. นาย ก มีเงินในกระปุก 20 บาท และจะหยอดกระปุกวันละ 3 บาททุกวัน นาย ข มีเงินในธนาคาร 300 บาท และจะฝากเพิ่มวันละ 20 บาททุกวัน ในวันที่ นาย ก มีเงินในกระปุก 44 บาท นาย ข จะมีเงินในธนาคารเท่าไร

20. ลำดับเลขคณิตในข้อใดต่อไปนี้มีบางพจน์เท่ากับ 40 [O-NET 52/17]

1.  $a_n = 1 - 2n$

2.  $a_n = 1 + 2n$

3.  $a_n = 2 - 2n$

4.  $a_n = 2 + 2n$

21. กำหนดให้  $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต ผลบวกของพจน์ที่ 40 และ พจน์ที่ 42 เท่ากับเท่าใด [O-NET 53/20]

22. พจน์ที่ 31 ของลำดับเลขคณิต  $-\frac{1}{20}, -\frac{1}{30}, -\frac{1}{60}, \dots$  เท่ากับเท่าใด [O-NET 51/13]

23. ลำดับ  $-24, -15, -6, 3, 12, 21, \dots, 1776$  มีกี่พจน์ [O-NET 56/21]

24. กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $5 - 7x, 3x + 28, 5x + 27, \dots, 2x^3 - 3x + 1$  เป็นลำดับเลขคณิต แล้วลำดับนี้มีกี่พจน์ [O-NET 57/21]

25. ถ้าพจน์ที่ 5 และ พจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิตเป็น 14 และ 29 ตามลำดับ แล้วพจน์ที่ 99 เท่ากับเท่าใด [O-NET 56/20]

26. ถ้า  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่ง  $a_{30} - a_{10} = 30$  แล้ว ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/12]



27. ถ้าผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตที่มี  $d$  เป็นผลต่างร่วม เท่ากับ 15 และ 80 ตามลำดับ แล้ว  $d^2$  มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-12]

28. ลำดับเลขคณิต  $-43, -34, -25, \dots$  มีพจน์ที่มีค่าน้อยกว่า 300 อยู่กี่พจน์ [O-NET 54/31]

29. บ้าจู้เริ่มขายขนมครกในวันที่ 3 มกราคม ในวันแรกขายได้กำไร 100 บาท และในวันต่อไปจะขายได้กำไรเพิ่มขึ้นจากวันก่อนหน้าวันละ 10 บาททุกวัน ข้อใดต่อไปนี้เป็นวันที่ของเดือนมกราคมที่บ้าจู้ขายได้กำไรเฉพาะในวันนั้น 340 บาท [O-NET 49/1-11]

ตัวกลางเลขคณิต

“ตัวกลางเลขคณิต” ระหว่าง  $a$  กับ  $b$  หาได้จากสูตร  $\frac{a+b}{2}$

จะเห็นว่า ถ้า  $x$  เป็นตัวกลางเลขคณิตระหว่าง  $a$  กับ  $b$  แล้ว จะได้ว่า ลำดับ  $a, x, b$  เป็นลำดับเลขคณิตเสมอ

เช่น ตัวกลางเลขคณิต ระหว่าง 23 กับ 91 คือ

ซึ่งจะเห็นว่า 23, 57, 91 เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วม คือ 34

ตัวกลางเลขคณิต “ $k$  จำนวน” ระหว่าง  $a$  กับ  $b$  คือ ตัวเลข  $k$  ตัว ที่แทรกระหว่าง  $a$  กับ  $b$  แล้วได้ลำดับเลขคณิต

โดยแต่ละคู่ที่อยู่ติดกัน จะมีผลต่างร่วม  $d = \frac{b-a}{k+1}$

เช่น ถ้าจะหาตัวกลางเลขคณิต 3 จำนวน ระหว่าง 23 กับ 91 จะได้แต่ละตัวต่างกัน  $d = \frac{91-23}{3+1} = 17$

ดังนั้น ตัวกลางเลขคณิต 3 จำนวน ระหว่าง 23 กับ 91 คือ 40, 57, 74

ซึ่งจะเห็นว่า 23, 40, 57, 74, 91 เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วม คือ 17

## แบบฝึกหัด

1. จงหาตัวกลางเลขคณิต ระหว่าง 12 และ 38
  
2. จงหาตัวกลางเลขคณิต ระหว่าง  $-3$  และ 9
  
3. ถ้าตัวกลางเลขคณิตระหว่าง 2 กับ  $x$  คือ 13 แล้ว จงหาค่า  $x$
  
4. จำนวนคู่หนึ่ง มีตัวกลางเลขคณิตคือ 10 ถ้าจำนวนคู่นี้ห่างกัน 6 แล้ว จงหาจำนวนคู่นี้

5. จงหาตัวกลางเลขคณิต 4 จำนวน ระหว่าง 17 กับ 32

6. จงหาตัวกลางเลขคณิต 3 จำนวน ระหว่าง 1 กับ 25

7. จงหาตัวกลางเลขคณิต 4 จำนวน ระหว่าง  $-8$  กับ 17

8. ถ้าตัวกลางเลขคณิต 2 จำนวน ระหว่าง  $a$  และ  $b$  คือ 12 และ 20 แล้ว จงหา  $a$  และ  $b$

## ลำดับเรขาคณิต

ในหัวข้อที่แล้ว เราเรียนลำดับเลขคณิต ซึ่งเป็นลำดับที่เพิ่มหรือลด อย่างคงที่ โดยการ “บวก”

ในหัวข้อนี้ จะพูดถึง ลำดับเรขาคณิต ซึ่งเป็นลำดับที่เพิ่มหรือลด อย่างคงที่ โดยการ “คูณ”

ตัวอย่างลำดับเรขาคณิต เช่น  $2, 6, 18, 54$

$$3, -6, 12, -24$$

$$10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \dots$$

แต่  $1, 4, 9, 16$  ไม่ใช่ลำดับเรขาคณิต เพราะคูณเพิ่มไม่คงที่

เราเรียกค่าคงที่ ที่นำมาคูณ ว่า “อัตราส่วนร่วม” ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $r$

$$\text{เช่น } 2, 6, 18, 54 \quad \rightarrow r = 3 \qquad 3, -6, 12, -24 \quad \rightarrow r = -2$$

$$5, 5, 5, 5 \quad \rightarrow r = 1 \qquad 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4} \quad \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2} \quad \rightarrow r = \sqrt{2}$$

จะเห็นว่า ถ้าเอาสองพจน์ที่อยู่ติดกันในลำดับเรขาคณิต มาหารกัน

โดยเอาพจน์ขวามือเป็นตัวตั้ง หารด้วย พจน์ซ้ายที่อยู่ติดกัน จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ  $r$  เสมอ

เช่น ในลำดับเรขาคณิต  $2, 6, 18, 54, \dots$  จะเห็นว่า  $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3 = r$

ตัวอย่าง ปัจจุบัน คนสามคน มีอายุ 5, 17, 47 ปี จงหาว่าอีกกี่ปี อายุของคนทั้งสามจึงจะเรียงเป็นลำดับเรขาคณิต

วิธีทำ เมื่อผ่านไป  $x$  ปี อายุของคนทั้งสาม จะกลายเป็น  $5 + x, 17 + x, 47 + x$  ปี ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{ลำดับนี้จะเป็นลำดับเรขาคณิต เมื่อ } \frac{17+x}{5+x} &= \frac{47+x}{17+x} \\ (17+x)(17+x) &= (47+x)(5+x) \\ 289 + 34x + x^2 &= 235 + 52x + x^2 \\ 54 &= 18x \\ 3 &= x \end{aligned}$$

นั่นคือ อีก 3 ปี อายุของคนทั้งสามจึงจะเรียงเป็นลำดับเรขาคณิต

#

ตัวอย่าง ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรก เท่ากับ 13 และ 27 ตามลำดับ จงหาสามพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ ข้อนี้ เราจะใช้วิธีสมมติ  $x$  สร้างสมการ แล้วแก้สมการ

ในโจทย์ประเภทนี้ เรายินยอมใช้เทคนิค “สมมติให้  $x$  แทนพจน์กลาง” เพื่อความสะดวกในการตัดเลข

แต่ละพจน์ในลำดับเลขคณิต ต้องห่างกันเป็นทวีคูณของ  $r$  ดังนั้น จะได้สามพจน์นี้ คือ  $\frac{x}{r}, x, xr$

$$\begin{aligned} \text{สามพจน์แรก คูณกันได้ } 27 \text{ ดังนั้น } \left(\frac{x}{r}\right)(x)(xr) &= 27 \\ x^3 &= 27 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

แทนค่า  $x$  จะได้ สามพจน์นี้ คือ  $\frac{3}{r}, 3, 3r$

$$\begin{aligned}
\text{สามพจน์นี้ บวกกันได้ 13 ดังนั้น} \quad \frac{3}{r} + 3 + 3r &= 13 \\
3 + 3r + 3r^2 &= 13r \\
3r^2 - 10r + 3 &= 0 \\
(r-3)(3r-1) &= 0 \\
r &= 3, \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

แทนค่า  $r = 3$  จะได้ สามพจน์นี้ คือ 1, 3, 9

$r = \frac{1}{3}$  จะได้ สามพจน์นี้ คือ 9, 3, 1 (มี 2 คำตอบ) #

สูตรถัดมาที่ต้องจำให้ขึ้นใจ คือ สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ตัวอย่าง จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต 1,  $\sqrt{2}$ , 2,  $2\sqrt{2}$ , ...

วิธีทำ จะเห็นว่าลำดับนี้มี  $a_1 = 1$  และ  $r = \sqrt{2}$  ดังนั้น สูตรพจน์ทั่วไป คือ  $a_n = (1) \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ที่ 10 =  $a_{10} = (1) \cdot (\sqrt{2})^{10-1} = (\sqrt{2})^9 = 16\sqrt{2}$  #

ตัวอย่าง ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_3 = 2$  และ  $a_7 = 2592$  จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

วิธีทำ จากสูตร  $a_n = a_1 r^{n-1}$  แทน  $n = 3$  จะได้  $a_3 = a_1 r^{3-1}$

$$2 = a_1 r^2 \quad (1)$$

แทน  $n = 7$  จะได้  $a_7 = a_1 r^{7-1}$

$$2592 = a_1 r^6 \quad (2)$$

$$(2) \div (1): \quad \frac{2592}{2} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^2}$$

$$1296 = r^4$$

$$\pm \sqrt[4]{1296} = r$$

$$\begin{array}{r}
8 \overline{) 1296} \\
9 \overline{) 162} \\
9 \overline{) 18} \\
\hline
2
\end{array}
\quad
\begin{aligned}
1296 &= 8 \times 9 \times 9 \times 2 \\
&= 2^3 \times 3^2 \times 3^2 \times 2 \\
&= 2^4 \times 3^4 \\
\sqrt[4]{1296} &= \sqrt[4]{2^4 \times 3^4} \\
&= 2 \times 3 = 6
\end{aligned}$$

$$\pm 6 = r$$

แทน  $r = \pm 6$  ใน (1):  $2 = a_1 (\pm 6)^2$

$$a_1 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

ดังนั้น สูตรพจน์ทั่วไป คือ  $a_n = \frac{1}{18} \cdot 6^{n-1}$  กับ  $a_n = \frac{1}{18} \cdot (-6)^{n-1}$  (สองคำตอบ) #

ตัวอย่าง ลูกบอลตกจากที่สูง 6400 เมตร เมื่อตกถึงพื้น ลูกบอลจะกระดอนกลับขึ้นไปได้สูงเป็นครึ่งหนึ่งของความสูงที่ตกลงมาเสมอ ถ้าปล่อยให้ลูกบอลกระดอนต่อไปเรื่อยๆ จงหาว่าหลังจากการตกถึงพื้นครั้งที่ 10 ลูกบอล จะกระดอนกลับขึ้นไปได้สูงเท่าไร

วิธีทำ ในการกระดอนครั้งแรก ลูกบอลจะขึ้นไปได้สูง 3200 เมตร

ในการกระดอนครั้งที่สอง ลูกบอลจะขึ้นไปได้สูง 1600 เมตร

ในการกระดอนครั้งที่สาม ลูกบอลจะขึ้นไปได้สูง 800 เมตร

จะเห็นว่า ความสูงของลูกบอลกระดอนกลับ เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี  $a_1 = 3200$  และ  $r = \frac{1}{2}$

จะได้สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ  $a_n = 3200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ดังนั้น ครั้งที่ 10 ลูกบอลจะกระดอนสูง =  $3200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \frac{3200}{2^9} = 6.25$  เมตร

#

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่า ลำดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นลำดับเรขาคณิต พร้อมทั้งหาอัตราส่วนร่วม

- |  |  |
|--|--|
| 1. 2, 4, 6, 8, ...                                 | 2. 1, 4, 16, 64, ...                           |
| 3. 1, 10, 100, 1000, ...                           | 4. 625, 125, 25, 5, ...                        |
| 5. 0.8, 0.08, 0.008, ...                           | 6. 5, 5, 5, 5, ...                             |
| 7. $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ | 8. 1, -1, 1, -1, ...                           |
| 9. 24, 8, $\frac{8}{3}, \frac{8}{9}, \dots$        | 10. 3, $3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}$               |
| 11. 81, -27, 9, -3                                 | 12. 8, $-4\sqrt{2}, 4, -2\sqrt{2}$             |
| 13. $x, 2x, 3x, 4x, \dots$                         | 14. $x, x^2, x^3, x^4, \dots$ เมื่อ $x \neq 0$ |

2. จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

- |  |  |
|--|--|
| 1. 5, 15, 45, ...                      | 2. 48, 24, 12, ...                                     |
| 3. 2, $2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$ | 4. 1, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$ |

3. จงหาพจน์ที่ 7 ของลำดับ  $2, 4, 8, \dots$
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. กำหนดลำดับ  $162, -54, 18, \dots$  จงหาค่าของ  $a_7$
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
5. กำหนดลำดับ  $\frac{1}{27}, \frac{1}{9\sqrt{3}}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \dots$  จงหาค่าของ  $a_{10}$
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
6. จงหาว่า 243 เป็นพจน์ที่เท่าไร ของลำดับ  $1, \sqrt{3}, 3, \dots$
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
7. จงหาว่าลำดับ  $5, 5\sqrt{2}, 10, \dots, 40$  มีกี่พจน์
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
8. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรก เท่ากับ 6 และ  $-64$  ตามลำดับ จงหาสามพจน์แรก  
ของลำดับนี้

9. ถ้าลำดับ  $x - 1, x + 3, 2x$  เป็นลำดับเรขาคณิต แล้ว จงหาค่า  $x$

10. เด็ก 3 คน มีอายุ 1, 5 และ 13 ปี จงหาว่าอีกกี่ปี อายุของเด็กทั้งสามจึงจะเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต

11. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_5 = 24$  และ  $a_7 = 96$  จงหา  $r$

12. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_1 = 2$  และ  $a_3 = 50$  จงหาสูตรพจน์ทั่วไป

13. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี พจน์ที่ 10 มีค่าเป็น 9 เท่าของพจน์ที่ 6 ถ้า  $a_3 = 3$  แล้ว จงหา  $a_5$



14. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_4 = 24$  และ  $a_7 = -192$  จงหาสูตรพจน์ทั่วไป
15. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_2 = 15$  และ  $a_7 = 3645$  จงหาสูตรพจน์ทั่วไป
16. เลี้ยงแบคทีเรียชนิดหนึ่งไว้ 10 ตัว พบว่าเมื่อให้อาหาร แบคทีเรียจะเพิ่มจำนวนเป็น 2 เท่า ทุกๆ นาที (เช่น นาทีที่ 1 เพิ่มเป็น 20 ตัว , นาทีที่ 2 เพิ่มเป็น 40 ตัว , นาทีที่ 3 เพิ่มเป็น 80 ตัว) จงหาสูตรสำหรับคำนวณจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป  $k$  นาที พร้อมทั้งหาจำนวนแบคทีเรีย เมื่อเวลาผ่านไป 5 นาที
17. ลูกเหม็นก้อนหนึ่งหนัก 1000 กรัม พบว่าลูกเหม็นจะระเหิดเล็กลง 10% ทุกๆ 1 นาที (เช่น นาทีที่ 1 เหลือ 900 กรัม , นาทีที่ 2 เหลือ 810 กรัม , นาทีที่ 3 เหลือ 729 กรัม เป็นต้น) จงหาสูตรสำหรับคำนวณน้ำหนักของลูกเหม็นหลังผ่านไป  $k$  นาที

18. เลี้ยงไวรัสชนิดหนึ่งไว้ 1000 ตัว พบว่าเมื่อให้อาหาร ไวรัสจะเพิ่มจำนวนขึ้น 10% ทุกๆนาทิจ (เช่น นาที่ที่ 1 เพิ่มเป็น 1100 ตัว , นาที่ที่ 2 เพิ่มเป็น 1210 ตัว , นาที่ที่ 3 เพิ่มเป็น 1331 ตัว) จงหาสูตรสำหรับคำนวณจำนวนไวรัส เมื่อเวลาผ่านไป  $k$  นาที่

19. ผักเงิน 1000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่ง ซึ่งให้ดอกเบี้ย 10% ต่อปีแบบทบต้น จงหาสูตรสำหรับคำนวณจำนวนเงิน ผักเมื่อเวลาผ่านไป  $k$  ปี

20. ลำดับเรขาคณิตในข้อใดต่อไปนี้ มีอัตราส่วนร่วมอยู่ในช่วง  $(0.3, 0.5)$  [O-NET 49/1-8]

1.  $3, \frac{5}{4}, \frac{25}{48}, \dots$

2.  $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \dots$

3.  $4, 3, \frac{9}{4}, \dots$

4.  $5, 4, \frac{16}{5}, \dots$

21. ลำดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นลำดับเรขาคณิต [O-NET 50/13]

1.  $a_n = 2^n \cdot 3^{2n}$

2.  $a_n = 2^n + 4^n$

3.  $a_n = 3^{n^2}$

4.  $a_n = (2n)^n$

22. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3$  เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่  $a_1 = 2$  และ  $a_3 = 200$

ถ้า  $a_2$  คือค่าในข้อใดต่อไปนี้แล้ว ข้อดังกล่าวคือข้อใด [O-NET 52/18]

1.  $-20$

2.  $-50$

3.  $60$

4.  $100$

23. พจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต  $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \dots$  ตรงกับเท่าใด [O-NET 57/24]

24. พจน์ที่ 16 ของลำดับเรขาคณิต  $\frac{1}{625}, \frac{1}{125\sqrt{5}}, \frac{1}{125}, \dots$  เท่ากับเท่าใด [O-NET 50/31]

25. ถ้าพจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิตเป็น 54 และ 1458 ตามลำดับ แล้ว พจน์แรกเท่ากับเท่าใด [O-NET 56/38]

26. ถ้าพจน์ที่ 5 และ พจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิตเป็น  $\frac{1}{2}$  และ  $-\frac{1}{16}$  ตามลำดับ แล้วพจน์ที่ 4 เท่ากับเท่าใด [O-NET 57/23]

27. ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมีผลบวกและผลคูณของ 3 พจน์แรกเป็น 13 และ 27 ตามลำดับ ถ้า  $r$  เป็นอัตราส่วนร่วมของลำดับนี้แล้ว  $r + \frac{1}{r}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 54/16]

28. ถ้า  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิตและผลต่างร่วมไม่เป็นศูนย์ แล้ว ข้อใดผิด [O-NET 57/20]

1.  $|a_{10} - a_{11}| = |a_{21} - a_{20}|$
2.  $a_9 + a_{14} = a_{11} + a_{12}$
3.  $\frac{a_{15} - a_{12}}{a_7 - a_4} = 1$
4. ถ้า  $b_n = a_n - 5$  ทุกๆ  $n$  แล้ว  $b_1, b_2, b_3, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต
5. ถ้า  $c_n = 5^n a_n$  ทุกๆ  $n$  แล้ว  $c_1, c_2, c_3, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิต

29. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิต

จงพิจารณาว่าลำดับในข้อต่อไปนี้เป็นลำดับเรขาคณิต [O-NET 51/28]

1.  $a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \dots$
2.  $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, \dots$
3.  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$

ตัวกลางเรขาคณิต

ตัวกลางเรขาคณิต ระหว่าง  $a$  กับ  $b$  หาได้จากสูตร  $\pm\sqrt{ab}$

ซึ่งถ้า  $x$  เป็นตัวกลางเรขาคณิตระหว่าง  $a$  กับ  $b$  แล้ว จะได้ว่า ลำดับ  $a, x, b$  เป็นลำดับเรขาคณิตเสมอ

เช่น ตัวกลางเรขาคณิต ระหว่าง 7 กับ 175 คือ  $\pm\sqrt{7 \cdot 175} = \pm\sqrt{7 \cdot 175} = \pm\sqrt{7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}$   
 $= \pm 35$

ซึ่งจะเห็นว่า 7,  $\pm 35$ , 175 เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม คือ 5 และ  $-5$

ตัวกลางเรขาคณิต  $k$  จำนวน ระหว่าง  $a$  กับ  $b$  คือ ตัวเลข  $k$  จำนวน ที่แทรกระหว่าง  $a$  กับ  $b$  แล้วได้ลำดับเรขาคณิต

โดยลำดับเรขาคณิตดังกล่าว จะมีอัตราส่วนร่วมสอดคล้องกับสมการ  $r^{k+1} = \frac{b}{a}$

สิ่งที่ต้องระวังในการแก้สมการหา  $r$  คือ ถ้า  $k+1$  เป็นเลขคู่ จะหา  $r$  ได้เฉพาะกรณีที่  $\frac{b}{a} \geq 0$  เท่านั้น

และ ถ้า  $k+1$  เป็นเลขคู่ ค่า  $r$  จะเป็นได้ทั้งบวกและลบ (เพราะ บวก หรือ ลบ ยกกำลังคู่ ก็ได้บวกเท่ากัน)

ตัวอย่าง จงหาตัวกลางเรขาคณิต 5 จำนวน ระหว่าง 4 กับ 108

วิธีทำ ต้องหาจำนวน 5 จำนวน ที่แทรกระหว่าง 4 กับ 108 แล้วได้ลำดับเรขาคณิต

ก่อนอื่น หา  $r$  โดยแก้สมการ  $r^{5+1} = \frac{108}{4}$

$$r^6 = 27$$

$$r^6 = 3^3$$

$$r = \pm\sqrt[6]{3^3} = \pm 3^{\left(\frac{3}{6}\right)} = \pm 3^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \pm\sqrt{3}$$

ดังนั้น ตัวกลาง 5 จำนวนนั้น คือ 4,  $4\sqrt{3}$ , 12,  $12\sqrt{3}$ , 36,  $36\sqrt{3}$ , 108

หรือ 4,  $-4\sqrt{3}$ , 12,  $-12\sqrt{3}$ , 36,  $-36\sqrt{3}$ , 108 ก็ได้ #

### แบบฝึกหัด

1. จงหาตัวกลางเรขาคณิตระหว่างจำนวนต่อไปนี้

1. 4 และ 36

2.  $-5$  และ  $-20$

3. 15 และ 45

4.  $a$  และ  $a^5$

2. ถ้าตัวกลางเรขาคณิต ระหว่าง 3 กับ  $x$  คือ  $\pm 15$  แล้ว จงหาค่า  $x$

3. จำนวนคู่หนึ่ง มีตัวกลางเรขาคณิตคือ  $\pm 10$  ถ้าจำนวนคู่นี้หารกันได้ 4 แล้ว จงหาจำนวนคู่นี้

4. จงหาตัวกลางเรขาคณิต 2 จำนวน ระหว่าง 6 กับ 48

5. จงหาตัวกลางเรขาคณิต 2 จำนวน ระหว่าง 8 และ 27

6. จงหาตัวกลางเรขาคณิต 3 จำนวน ระหว่าง  $-5$  กับ  $-405$

7. จงหาตัวกลางเรขาคณิต 4 จำนวน ระหว่าง 3 กับ  $384\sqrt{2}$

8. ถ้าตัวกลางเรขาคณิต 3 จำนวน ระหว่าง  $a$  และ  $b$  คือ 2, 4, 8 แล้ว จงหา  $a$  และ  $b$

9. ถ้าตัวกลางเรขาคณิต 2 จำนวน ระหว่าง  $a$  และ  $b$  คือ 6 และ 9 แล้ว จงหา  $a$  และ  $b$

## อนุกรม

อนุกรม คือ การนำตัวเลขในลำดับมาบวกกัน

เช่น ถ้ามีลำดับ  $4, 9, 16, 25, 36$  จะได้อนุกรมของลำดับนี้ คือ  $4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90$

ปกติ โจทย์จะไม่ได้ให้เรบวกทุกตัว ส่วนใหญ่มักจะให้เรบวกแค่ “ $n$  ตัวแรก”

เช่น ในอนุกรม  $4 + 9 + 16 + 25 + 36$  ผลบวก 3 ตัวแรกของอนุกรมนี้ คือ  $4 + 9 + 16 = 29$

ผลบวก 4 ตัวแรกของอนุกรมนี้ คือ  $4 + 9 + 16 + 25 = 54$

ผลบวก 1 ตัวแรกของอนุกรมนี้ คือ 4

เรานิยมใช้สัญลักษณ์  $S_n$  แทน “ผลบวก  $n$  ตัวแรก ของอนุกรม”

ดังนั้น ในอนุกรมนี้ จะได้ว่า  $S_3 = 29$ ,  $S_4 = 54$  และ  $S_1 = 4$  เป็นต้น

ในการทำงานกลับกัน ถ้าเรามี  $S$  หลายๆตัว เราจะย้อนกลับไปหาค่าของแต่ละตัวในลำดับได้

เช่น ถ้าเรารู้ว่า  $S_3 = 22$  และ  $S_4 = 28$  เราจะหา  $a_4$  ได้

$$\text{เพราะ } S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\text{ดังนั้น } a_4 = S_4 - S_3 = 28 - 22 = 6$$

ถ้าเรารู้ว่า  $S_{56} = 430$  และ  $S_{57} = 418$  เราจะหา  $a_{57}$  ได้

$$\text{เพราะ } S_{57} = a_1 + \dots + a_{56} + a_{57}$$

$$S_{56} = a_1 + \dots + a_{56}$$

$$\text{ดังนั้น } a_{57} = S_{57} - S_{56} = 418 - 430 = -12$$

ถ้าเรารู้ว่า  $S_{90} = 105$  และ  $S_{93} = 120$  เราจะหา  $a_{91} + a_{92} + a_{93}$  ได้

$$\text{เพราะ } S_{90} = a_1 + \dots + a_{90}$$

$$S_{93} = a_1 + \dots + a_{90} + a_{91} + a_{92} + a_{93}$$

$$\text{ดังนั้น } a_{91} + a_{92} + a_{93} = S_{93} - S_{90} = 120 - 105 = 15$$

ตัวอย่าง กำหนด  $S_n = 3n^2 + 1$  จงหา  $a_5 + a_6$

วิธีทำ  $a_5 + a_6$  จะหาได้จาก  $S_6 - S_4$  เพราะ  $S_6 = a_1 + \dots + a_4 + a_5 + a_6$

$$S_4 = a_1 + \dots + a_4 \quad \text{ลบกัน จะหักกัน เหลือ } a_5 + a_6$$

ข้อนี้ ให้สูตร  $S_n$  มา แปลว่าเราจะหา  $S$  อะไรก็ได้ นั่นคือ  $S_6 = 3 \cdot 6^2 + 1 = 109$

$$S_4 = 3 \cdot 4^2 + 1 = 49$$

$$\text{ดังนั้น } a_5 + a_6 = S_6 - S_4 = 109 - 49 = 60$$

#



แบบฝึกหัด

1. กำหนดลำดับ 2, 5, 8, 11 จงหา

1.  $S_2$

2.  $S_4$

2. กำหนดให้  $a_n = n^2 + 1$  จงหา

1.  $S_1$

2.  $S_3$

3. กำหนดให้  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$  จงหา

1.  $a_1$

2.  $a_{10}$

3.  $a_{15}$

4.  $a_6 + a_7 + a_8$

4. กำหนดให้  $S_n = 35 - n^2$  จงหา

1.  $a_4$

2.  $a_8$

3.  $a_6 + a_7$

4.  $a_1 + a_2 + a_3$

5. ผลบวก 3 พจน์แรกของลำดับ  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n+1}$  เท่ากับเท่าใด [O-NET 56/25]

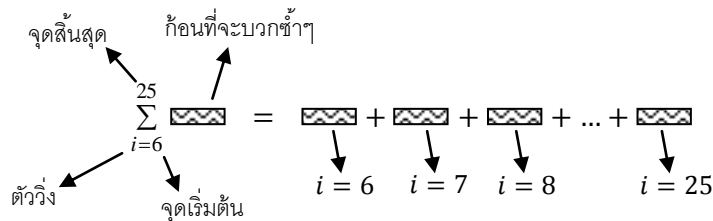
6. ถ้าผลบวกของ  $n$  พจน์แรกของอนุกรมหนึ่ง คือ  $S_n = 3n^2 + 2$  แล้ว พจน์ที่ 10 ของอนุกรมนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-9]

## สัญลักษณ์ซิกมา

หัวข้อนี้ จะพูดถึงการใช้สัญลักษณ์  $\sum$  (อ่านว่า “ซิกมา”) เพื่อเขียน “หลายๆตัวบวกกัน” ให้อยู่ในรูปสั้นๆ

สัญลักษณ์  $\sum_{i=a}^b$  จะหมายถึงการนำก้อน  $\square$  มาบวกซ้ำๆกัน หลายๆก้อน

โดยก้อนแรก ให้  $i = a$  และ ก้อนถัดไป ให้เพิ่ม  $i$  ขึ้นทีละ 1 ไปเรื่อยๆ จนจบก้อนสุดท้ายที่  $i = b$



$$\begin{aligned} \text{เช่น } \sum_{i=3}^6 i^2 + 1 &= (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) + (6^2 + 1) \\ &= 10 + 17 + 26 + 37 = 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^5 2^i - i &= (2^3 - 3) + (2^4 - 4) + (2^5 - 5) \\ &= 5 + 12 + 27 = 44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 i &= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=9}^{12} 4i &= (4 \times 9) + (4 \times 10) + (4 \times 11) + (4 \times 12) \\ &= 36 + 40 + 44 + 48 = 168 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 i(i+1) &= (1)(1+1) + (2)(2+1) + (3)(3+1) + (4)(4+1) \\ &= 2 + 6 + 12 + 20 = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 4 &= (4) + (4) + (4) + (4) + (4) \\ &= 20 \end{aligned}$$

ในทางกลับกัน เราต้องสามารถรวม “หลายๆตัวบวกกัน” ให้เป็นรูป  $\sum$  ได้ด้วย

โดยคำตอบจะอยู่ในรูป  $\sum_{i=1}^k$  (สูตรพจน์ทั่วไป ที่เปลี่ยน  $n$  เป็น  $i$ ) เมื่อ  $k$  คือจำนวนพจน์ที่มาบวกกัน

ตัวอย่าง จงเขียน  $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$  ให้เป็นรูป  $\sum$

วิธีทำ จะรวม  $\sum$  ต้องหา 2 อย่าง คือ “สูตรพจน์ทั่วไป” กับ “จำนวนพจน์”

จะเห็นว่าลำดับนี้ไม่ใช่ทั้งลำดับเลขคณิต หรือ ลำดับเรขาคณิต จึงใช้สูตรไม่ได้ ต้องเดาสูตรพจน์ทั่วไปเอง  
เดาสูตรพจน์ทั่วไป จะได้  $a_n = n^2$

จำนวนพจน์ หาได้โดยแก้สมการ  $36 = n^2$  (หรือจะนับเอาเลยก็ได้) จะได้ว่าอนุกรมนี้มี 6 พจน์

เอาสูตรพจน์ทั่วไป เปลี่ยน  $n$  เป็น  $i$  วางหลัง  $\sum$  และใส่จำนวนพจน์ จะได้  $\sum_{i=1}^6 i^2$

#

ตัวอย่าง จงเขียน  $5 + 8 + 11 + \dots + 38$  ให้อยู่ในรูป  $\Sigma$

วิธีทำ จะเห็นว่าลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ที่มี  $a_1 = 5$  และ  $d = 3$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะได้สูตรพจน์ทั่วไป คือ } a_n &= 5 + (n-1)(3) \\ &= 5 + 3n - 3 \\ &= 3n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ถัดมา หาจำนวนพจน์ที่มาบวกกัน โดยการแก้สมการ } 38 &= 3n + 2 \\ 36 &= 3n \\ 12 &= n \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 5 + 8 + 11 + \dots + 38 = \sum_{i=1}^{12} 3i + 2$$

#

ตัวอย่าง จงเขียน  $3 + 6 + 12 + \dots + 1536$  ให้อยู่ในรูป  $\Sigma$

วิธีทำ จะเห็นว่าลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี  $a_1 = 3$  และ  $r = 2$

$$\text{ดังนั้น จะได้สูตรพจน์ทั่วไป คือ } a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ถัดมา หาจำนวนพจน์ที่มาบวกกัน โดยการแก้สมการ } 1536 &= 3 \cdot 2^{n-1} \\ 512 &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 512} \\ 8 \overline{) 64} \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{aligned} 512 &= 8 \times 8 \times 8 \\ &= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \\ &= 2^9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^9 &= 2^{n-1} \\ 9 &= n - 1 \\ 10 &= n \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 3 + 6 + 12 + \dots + 1536 = \sum_{i=1}^{10} 3 \cdot 2^{i-1}$$

#

### แบบฝึกหัด

1. จงเขียนผลบวกในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปที่ไม่มี  $\Sigma$

$$1. \sum_{i=1}^{10} 3i$$

$$2. \sum_{i=2}^6 -i$$

$$3. \sum_{i=1}^5 i^3$$

$$4. \sum_{i=1}^7 \frac{i}{i+1}$$

$$5. \sum_{i=3}^7 6$$

$$6. \sum_{i=1}^4 i^i$$

7. 
$$\sum_{i=2}^4 -i \cdot 2^i$$

8. 
$$\sum_{i=1}^{10} 1 + (-1)^i$$

9. 
$$\sum_{i=1}^{10} (-1)^i \cdot i$$

10. 
$$\sum_{i=1}^5 2a_i + 1$$

2. จงเขียนผลบวกในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป  $\sum$

1.  $2 + 4 + 6 + \dots + 10$

2.  $1 + 3 + 5 + \dots + 21$

3.  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{19}{20}$

4.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{64}$

5.  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{11}{64}$

6.  $1 + 2 + 4 + \dots + 64$

7.  $4 + 9 + 16 + \dots + 121$

8.  $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + (8)(9)$

9.  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$

10.  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

## อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต คือ อนุกรมที่เกิดจากลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างอนุกรมเลขคณิต เช่น  $5 + 8 + 11 + \dots + 38$

$$16 + 13 + 10 + \dots + 4$$

$$1 - 2 - 5 - \dots - 17 \quad \rightarrow \quad 1 + (-2) + (-5) + \dots + (-17)$$

แต่  $2 + 4 + 8 + \dots + 64$  ไม่ใช่อนุกรมเลขคณิต เพราะ  $2, 4, 8, \dots, 64$  ไม่ใช่ลำดับเลขคณิต

สมบัติที่สำคัญของลำดับเลขคณิต คือ เราสามารถ “จับคู่ให้ผลบวกเท่ากัน” ได้

$$\text{เช่น } 10 + 12 + 14 + \dots + 32 + 34 + 36 = (10 + 36) + (12 + 34) + (14 + 32) + \dots$$

$$= 46 + 46 + 46 + \dots$$

$$18 + 13 + 8 + \dots + (-2) + (-7) + (-12) = (18 + (-12)) + (13 + (-7)) + (8 + (-2)) + \dots$$

$$= 6 + 6 + 6 + \dots$$

และจากสมบัติดังกล่าว จะทำให้ได้สูตรสำหรับหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต ที่ต้องท่อง จะมี 2 สูตร ดังนี้

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \quad (2)$$

สูตรแรก จะใช้เมื่อเรารู้พจน์สุดท้าย

นอกนั้น ใช้สูตรที่สอง

เมื่อ  $S_n$  คือ ผลบวกของอนุกรม

$a_1$  คือพจน์แรก ,  $a_n$  คือพจน์สุดท้าย

$n$  คือจำนวนพจน์ที่นำมาบวก

$d$  คือผลต่างร่วมในลำดับเลขคณิต

ตัวอย่าง จงหาค่าของ  $2 + 6 + 10 + \dots + 38$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต และเนื่องจากเรารู้พจน์สุดท้าย  $a_n = 38$  ดังนั้น เราจะใช้สูตรแรก

และจะได้  $a_1 = 2$  ,  $d = 4$  แต่จะเห็นว่าสูตรแรกยังต้องใช้  $n$  อีกตัว

$n$  คือ จำนวนพจน์ในลำดับ ต้องหาโดยแก้สมการสูตรพจน์ทั่วไป ว่า 38 เป็นพจน์ที่เท่าไร

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } a_1 = 2, d = 4 \text{ ดังนั้น สูตรพจน์ทั่วไป คือ } a_n &= 2 + (n-1)(4) \\ &= 2 + 4n - 4 \\ &= 4n - 2 \end{aligned}$$

$$\text{หา } n \text{ ได้จากการแก้สมการ } 38 = 4n - 2$$

$$40 = 4n$$

$$10 = n$$

$$\text{ดังนั้น } 2 + 6 + 10 + \dots + 38 = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$= \frac{10}{2}[2 + 38] = 200$$

#

ตัวอย่าง จงหาผลบวก 12 พจน์แรก ของอนุกรม  $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$

วิธีทำ ข้อนี้ เราไม่รู้พจน์สุดท้าย ดังนั้น เราจะใช้สูตรที่สอง

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } a_1 = 4, d = -3, n = 12 \text{ จะได้ } S_n &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \\ &= \frac{12}{2}[2(4) + (12-1)(-3)] \\ &= 6[8 + (-33)] \\ &= 6(-25) = -150 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 12 พจน์แรก = -150

#

ตัวอย่าง แท่งไม้ก่องหนึ่ง ชั้นบนสุดมีไม้ 5 แท่ง ชั้นถัดลงมาไม้เพิ่มขึ้นชั้นละ 2 แท่ง ถ้าก่องนี้มีแท่งไม้ทั้งหมด 285 แท่ง

จงหาว่าไม้ก่องนี้มีกี่ชั้น

วิธีทำ ไม้เพิ่มชั้นละ 2 แท่ง ดังนั้น ชั้นที่สองมีไม้ 7 แท่ง , ชั้นที่สามมี 9 แท่ง , ชั้นที่สี่มี 11 แท่ง , ...

เนื่องจากทั้งก่อง มี 285 แท่ง หมายความว่า  $5 + 7 + 9 + 11 + \dots = 285$

จะเห็นว่าเป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี  $a_1 = 5, d = 2, S_n = 285$

$$\begin{aligned} \text{ข้อนี้ เราไม่รู้พจน์สุดท้าย ดังนั้น เราจะใช้สูตรที่สอง } S_n &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \\ 285 &= \frac{n}{2}[2(5) + (n-1)(2)] \\ 285 &= \frac{n}{2}[10 + 2n - 2] \\ 285 &= \frac{n}{2}[8 + 2n] \\ 285 &= 4n + n^2 \\ 0 &= n^2 + 4n - 285 \\ 0 &= (n-15)(n+19) \\ n &= 15, -19 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $n$  คือจำนวนชั้น เป็นลบไม่ได้ ดังนั้น  $n$  เป็น 15 ไม่ได้

ดังนั้น ไม้ก่องนี้มีทั้งหมด 15 ชั้น

#

### แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของอนุกรมต่อไปนี้

1.  $2 + 4 + 6 + \dots + 80$

2.  $11 + 18 + 25 + \dots + 109$



3.  $40 + 37 + 34 + \dots + 1$

4. ผลบวก 12 พจน์แรก ของ  $3 + 5 + 7 + \dots$

5. ผลบวก 8 พจน์แรก ของ  $7 + 4 + 1 + \dots$

6.  $\sum_{i=1}^{10} 3i - 1$

2. ลำดับชุดหนึ่ง มี  $a_n = 2n + 1$  จงหาค่าของ  $S_{10}$

3. ลำดับชุดหนึ่ง มี  $a_n = 3n - 1$  จงหาค่าของ  $a_6 + a_7 + \dots + a_{20}$

4. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_5 = 17$  และ  $a_9 = 33$  จงหาค่าของ  $S_7$

5. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_1 = 3$  และ  $S_{10} = 210$  จงหาค่าของ  $a_8$

6. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $S_4 = 10$  และ  $S_9 = 90$  จงหาค่าของ  $a_5$

7. จงหาว่า จะต้องบวกอนุกรม  $2 + 7 + 12 + \dots$  ไปกี่พจน์ จึงจะได้ผลบวกเท่ากับ 87

8. จงหาว่า จะต้องบวกอนุกรม  $50 + 43 + 36 + \dots$  ไปกี่พจน์ จึงจะได้ผลบวกเป็นจำนวนลบ

9. อนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $S_{12} = 60$  จงหาค่าของ  $a_1 + a_{12}$

10. อนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $S_{16} = 120$  จงหาค่าของ  $a_2 + a_{15}$
11. อนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $S_{10} = 100$  จงหาค่าของ  $a_1 + a_2 + a_9 + a_{10}$
12. อนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่ง มี  $S_8 = 16$  จงหาค่าของ  $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_7$
13. จงหาผลบวกของจำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 30 ถึง 100 ที่หารด้วย 3 ลงตัว
14. นายดำกู้เงินมาจำนวนหนึ่ง โดยจ่ายคืนเดือนแรก 200 บาท และในเดือนถัดไป นายดำต้องจ่ายเพิ่มขึ้นทุกๆเดือน โดยจะต้องจ่ายคืนมากขึ้นเดือนละ 50 บาท หลังจากชำระหมด พบว่าในเดือนสุดท้าย นายดำจ่ายคืน 950 บาท จงหาว่านายดำ จ่ายเงินคืนรวมทั้งสิ้นกี่บาท

15. นาย ก เริ่มเก็บเงินตั้งแต่วันที่ 10 ก.ค. เพื่อซื้อของราคา 1900 บาท โดยวันแรก เก็บได้ 100 บาท วันต่อมาเก็บได้มากขึ้น วันละ 20 บาท จงหาว่านาย ก เก็บเงินได้ครบในวันที่เท่าไรของเดือน ก.ค.

16. วันที่ 3 ม.ค. นาย ก เริ่มขี่จักรยานจาก กรุงเทพ ไป จันทบุรี โดยวันแรก ขี่ได้ 50 กิโลเมตร วันต่อมาเริ่มเหนื่อย จึงขี่ได้น้อยลงทุกวัน วันละ 2 กิโลเมตร

1. จงหาระยะทางที่ นาย ก จะเดินทางได้ หลังสิ้นวันที่ 10 ม.ค.

2. นาย ข เริ่มขี่จักรยานพร้อม นาย ก โดยวันแรก ขี่ได้ 10 กิโลเมตร และวันต่อมาเริ่มฮึดสู้ จึงขี่ได้มากขึ้นทุกวัน วันละ 2 กิโลเมตร จงหาว่า นาย ข จะเดินทางได้มากกว่า 200 กิโลเมตรได้ในวันที่เท่าไรของเดือน ม.ค.

3. นาย ข จะเดินทางทันนาย ก ได้ในวันที่เท่าไรของเดือน ม.ค.

4. นาย ค เริ่มขี่จักรยานพร้อมนาย ข แต่ขี่จากจันทบุรี ไปกรุงเทพ โดยวันแรกขี่ได้ 20 กิโลเมตร วันต่อมาขี่ได้มากขึ้นวันละ 3 กิโลเมตร ถ้าจันทบุรี อยู่ห่างจากกรุงเทพ 255 กิโลเมตร จงหาว่า นาย ค จะเดินทางมาพบกับนาย ข ในวันที่เท่าไรของเดือน ม.ค.
17. ค่าของ  $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 101$  เท่ากับเท่าใด [O-NET 52/24]
18. ถ้าอนุกรมเลขคณิตมีพจน์แรกเป็น  $-8$  และมีผลบวกของ 50 พจน์แรกเป็น 3275 แล้วผลต่างร่วมมีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/36]
19. ในสวนป่าแห่งหนึ่ง เจ้าของปลุกต้นยูคาลิปตัสเป็นแถวดังนี้ แถวแรก 12 ต้น แถวที่สอง 14 ต้น แถวที่สาม 16 ต้น โดยปลุกเพิ่มเช่นนี้ ตามลำดับเลขคณิต ถ้าเจ้าของปลุกต้นยูคาลิปตัสไว้ทั้งหมด 15 แถว จะมีต้นยูคาลิปตัสในสวนป่านี้ทั้งหมดกี่ต้น [O-NET 53/38]

20. ชุงกองหนึ่งวางเรียงซ้อนกันเป็นชั้นๆ โดยชั้นบนจะมีจำนวนน้อยกว่าชั้นล่างที่อยู่ติดกัน 3 ต้นเสมอ ถ้าชั้นบนสุดมี 49 ต้น และชั้นล่างสุดมี 211 ต้น แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้องบ้าง [O-NET 57/22]
1. ชุงกองนี้มี 56 ชั้น
  2. ชั้นที่ 8 (นับจากบนลงล่าง) มีชุง 70 ต้น
  3. ชุงกองนี้มีทั้งหมด 7,150 ต้น

21. เกษตรกรคนหนึ่งซื้อรถกระบะโดยผ่อนชำระเป็นเวลา 4 ปี ทางผู้ขายกำหนดให้ผ่อนชำระเดือนแรก 5,500 บาท และเดือนถัดๆ ไปให้ผ่อนชำระเพิ่มขึ้นทุกเดือนๆ ละ 400 บาท จนครบกำหนด ถ้า  $x$  คือจำนวนเงินที่เขาต้องชำระในเดือนสุดท้าย และ  $y$  คือจำนวนเงินที่เขาชำระไปใน 2 ปีแรก (หน่วย : บาท) แล้ว จงหาค่า  $x$  และ  $y$  [O-NET 56/26]

22. กำหนดให้  $S_n$  เป็นผลบวก  $n$  พจน์แรกของลำดับเลขคณิต  $a_1, a_2, a_3, \dots$   
 ถ้า  $S_5 = 90$  และ  $S_{10} = 5$  แล้ว  $a_{11}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 54/17]

23.  $\sum_{k=1}^{50} (1 + (-1)^k)k$  มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-10]

24. ถ้า  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่ง  $a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 100$  แล้ว  $S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/27]

25. กำหนดให้  $S = \{101, 102, 103, \dots, 999\}$  ถ้า  $a$  เท่ากับผลบวกของจำนวนคี่ทั้งหมดใน  $S$  และ  $b$  เท่ากับผลบวกของจำนวนคู่ทั้งหมดใน  $S$  แล้ว  $b - a$  มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/32]

26. ถ้าพจน์ที่  $n$  ของอนุกรมคือ  $3n - 10$  แล้ว ผลบวก 23 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับเท่าใด [O-NET 56/23]

## อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมที่เกิดจากลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างอนุกรมเรขาคณิต เช่น  $6 + 12 + 24 + \dots + 384$

$$2 + 2\sqrt{3} + 6 + \dots + 18$$

$$2 - 4 + 8 - 16 + \dots - 64$$

$$6 + 2 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{27}$$

แต่  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2$  ไม่ใช่อนุกรมเรขาคณิต เพราะ  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 8^2$  ไม่ใช่ลำดับเรขาคณิต

สูตรสำหรับหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต ที่ต้องท่อง จะมี 2 สูตร ดังนี้

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} \quad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (2)$$

สูตรแรก จะใช้เมื่อเรารู้พจน์สุดท้าย

นอกนั้น ใช้สูตรที่สอง

เมื่อ  $S_n$  คือ ผลบวกของอนุกรม

$a_1$  คือพจน์แรก ,  $a_n$  คือพจน์สุดท้าย

$n$  คือจำนวนพจน์ที่นำมาบวก

$r$  คืออัตราส่วนร่วมในลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่าง จงหาค่าของ  $6 + 12 + 24 + \dots + 384$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิต และเนื่องจากเรารู้พจน์สุดท้าย  $a_n = 384$  ดังนั้น เราจะใช้สูตรแรก

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } a_1 = 6, a_n = 384, r = 2 \text{ จะได้ } S_n &= \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} \\ &= \frac{6 - (384)(2)}{1 - 2} \\ &= \frac{6 - 768}{-1} = 762 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น จะได้ } 6 + 12 + 24 + \dots + 96 = 762$$

#

ตัวอย่าง จงหาผลบวก 10 พจน์แรก ของอนุกรม  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

วิธีทำ ข้อนี้ เราไม่รู้พจน์สุดท้าย ดังนั้น เราจะใช้สูตรที่สอง

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } a_1 = 1, r = \frac{1}{2}, n = 10 \text{ จะได้ } S_n &= \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \\ &= \frac{(1)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1023}{512} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น จะได้ผลบวก 10 พจน์แรก } = \frac{1023}{512}$$

#



ตัวอย่าง จงหาค่าของ  $\sum_{i=1}^7 2 \cdot 3^i - 3 \cdot 2^i$

วิธีทำ  $\sum_{i=1}^7 2 \cdot 3^i - 3 \cdot 2^i = (2 \cdot 3^1 - 3 \cdot 2^1) + (2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2) + \dots + (2 \cdot 3^7 - 3 \cdot 2^7)$

$$= (2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot 3^7) - (3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^7)$$

$$= (2)(3^1 + 3^2 + \dots + 3^7) - (3)(2^1 + 2^2 + \dots + 2^7)$$

$a_1 = 3^1$	$a_1 = 2^1$
$a_n = 3^7$	$a_n = 2^7$
$r = 3$	$r = 2$

$$= (2) \left( \frac{3^1 - (3^7)(3)}{1-3} \right) - (3) \left( \frac{2^1 - (2^7)(2)}{1-2} \right)$$

$$= (2) \left( \frac{3-6561}{-2} \right) - (3) \left( \frac{2-256}{-1} \right)$$

$$= 6558 - 762$$

$$= 5796 \quad \#$$

ตัวอย่าง นาย ก กู้เงิน จาก นาย ข โดยทำสัญญาว่าจะจ่ายเงินในเดือนแรก 1 บาท และในเดือนถัดไป จะจ่ายเพิ่มเป็น

สองเท่าของเดือนก่อนหน้า จนครบ 10 เดือน จงหาว่านาย ก จ่ายเงินรวมทั้งสิ้น กี่บาท

วิธีทำ จะได้เดือนที่สองจ่าย 2 บาท, เดือนที่สามจ่าย 4 บาท, เดือนที่สี่จ่าย 8 บาท, ... จนครบ 10 เดือน

จะเห็นว่าเป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี  $a_1 = 1$ ,  $r = 2$ ,  $n = 10$

เนื่องจากไม่รู้พจน์สุดท้าย ดังนั้น ใช้สูตร  $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{(1)(1-2^{10})}{1-2}$$

$$= \frac{1-1024}{-1} = 1023$$

ดังนั้น นาย ก ต้องจ่ายเงินทั้งสิ้น 1023 บาท

#

### แบบฝึกหัด

1. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

1.  $1 + 2 + 4 + \dots + 128$

2.  $2 + 6 + 18 + \dots + 486$

3.  $3 - 6 + 12 - 24 + \dots + 192$

4.  $243 + 162 + 108 + \dots + 32$

5. ผลบวก 6 พจน์แรก ของ  $4 + 8 + 16 + \dots$

6. ผลบวก 8 พจน์แรก ของ  $512 + 256 + 128 + \dots$

7. 
$$\sum_{i=1}^{10} 5 \cdot 2^{i-1}$$

8. 
$$\sum_{i=1}^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$$

2. ลำดับชุดหนึ่ง มี  $a_n = (-2)^n$  จงหาค่าของ  $S_9$

3. ลำดับชุดหนึ่ง มี  $a_n = \frac{288}{2^n}$  จงหาค่าของ  $S_5$

4. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_3 = 24$  และ  $a_6 = -192$  จงหาค่าของ  $S_5$

5. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี  $r = -2$  และ  $S_6 = 42$  จงหาค่าของ  $S_{10}$
6. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มี  $a_3 = 9$  และ  $S_4 - S_2 = -18$  จงหาค่าของ  $S_5$
7. จงหาว่า จะต้องบวกอนุกรม  $1 - 2 + 4 + \dots$  ไปกี่พจน์ จึงจะได้ผลบวกเท่ากับ  $-85$
8. นาย ก เริ่มเก็บเงินวันที่ 5 ม.ค. เป็นจำนวน 1 บาท วันถัดมา จะเก็บเพิ่มเป็น 3 เท่าของวันแรก
- เมื่อสิ้นวันที่ 10 ม.ค. นาย ก จะมีเงินเก็บเท่าไร

2. นาย ข เริ่มเก็บเงินพร้อม นาย ก โดยวันที่ 5 ม.ค. นาย ข เริ่มเก็บ 5 บาท และวัดถัดมา นาย ข จะเก็บเพิ่มเป็น 2 เท่าของวันแรก ถ้า นาย ก ยังเก็บเงินแบบเก่า ในวันที่ นาย ก มีเงินเก็บ 1093 บาท นาย ข จะมีเงินเก็บเท่าไร

9. ข้อใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 100 พจน์ [O-NET 52/23]

1.  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + \dots + 199$
2.  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)} + \dots + \frac{1}{199}$
3.  $1 + 2 + 4 + \dots + (2^{n-1}) + \dots + 2^{199}$
4.  $\frac{1}{5} + \frac{1}{125} + \frac{1}{3125} + \dots + \frac{1}{5^{2n-1}} + \dots + \frac{1}{5^{199}}$

10. ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต  $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 256$  เท่ากับเท่าใด [O-NET 51/14]

11. ถ้าอนุกรมเรขาคณิตมี  $a_1 = \frac{1}{2}$  และ  $a_{10} = 256$  แล้ว ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับเท่าใด [O-NET 57/25]

12. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า  $a_2 = 8$  และ  $a_5 = -64$  แล้ว ผลบวกของ 10 พจน์แรกของลำดับนี้เท่ากับเท่าใด [O-NET 53/22]
13. กำหนดให้  $S_n$  เป็นผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 2 ถ้า  $S_{10} - S_8 = 32$  แล้ว พจน์ที่ 9 ของอนุกรมนี้ เท่ากับเท่าใด [O-NET 51/15]
14. ถ้าอนุกรมเรขาคณิตมีผลบวก 10 พจน์แรกเป็น 3069 และมีอัตราส่วนร่วมเป็น 2 แล้ว พจน์ที่ 3 ของอนุกรมนี้เท่ากับเท่าใด [O-NET 56/24]
15. ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริงลบ และ  $a^{20} + 2a - 3 = 0$  แล้ว  $1 + a + a^2 + \dots + a^{19}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-24]

## ลำดับ

- |                  |                         |                 |                      |
|------------------|-------------------------|-----------------|----------------------|
| 1. 1. 3, 5, 7, 9 | 2. 2, 5, 8, 11          | 3. 1, 4, 9, 16  | 4. 4, 9, 16, 25      |
| 5. 2, 4, 8, 16   | 6. 10, 100, 1000, 10000 |                 |                      |
| 2. 7             | 3. ไม่มี                | 4. 18           | 5. 47                |
| 6. 9             | 7. 17                   | 8. 10           | 9. 15                |
| 10. 20           |                         |                 |                      |
| 11. 1. $a_n = n$ | 2. $a_n = 3$            | 3. $a_n = n^2$  | 4. $a_n = (n + 1)^2$ |
| 5. $a_n = 2^n$   | 6. $a_n = (-1)^n$       | 7. $a_n = 10^n$ | 8. $a_n = 10^n - 1$  |
| 12. 5            | 13. 20                  | 14. 123         |                      |

## ลำดับเลขคณิต

- |                           |                        |                      |                               |
|---------------------------|------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 1. 1. เป็น ( $d = 2$ )    | 2. ไม่เป็น             | 3. เป็น ( $d = 3$ )  | 4. ไม่เป็น                    |
| 5. เป็น ( $d = -2$ )      | 6. ไม่เป็น             | 7. ไม่เป็น           | 8. เป็น ( $d = \frac{1}{3}$ ) |
| 9. ไม่เป็น                | 10. ไม่เป็น            | 11. เป็น ( $d = 2$ ) | 12. เป็น ( $d = a$ )          |
| 2. 3                      | 3. 3                   | 4. 7                 | 5. $a_n = 2n + 1$             |
| 6. $a_n = \frac{-n+7}{2}$ | 7. $a_n = \frac{n}{6}$ | 8. 88                | 9. 11                         |
| 10. 34                    | 11. $a_n = 2n + 3$     | 12. $a_n = 2n + 5$   | 13. 19                        |
| 14. 10                    | 15. $a_n = 2n + 1$     |                      |                               |
| 16. 1. 33                 | 2. 19                  | 3. 6                 | 4. 46                         |
| 5. 66                     | 6. 20                  |                      |                               |
| 17. 30                    | 18. 16                 | 19. 460              | 20. 4                         |
| 21. -37                   | 22. $\frac{9}{20}$     | 23. 201              | 24. 11                        |
| 25. 296                   | 26. 1.5                | 27. 9                | 28. 39                        |
| 29. 27                    |                        |                      |                               |

## ตัวกลางเลขคณิต

- |                   |              |                 |          |
|-------------------|--------------|-----------------|----------|
| 1. 25             | 2. 3         | 3. 24           | 4. 7, 13 |
| 5. 20, 23, 26, 29 | 6. 7, 13, 19 | 7. -3, 2, 7, 12 | 8. 4, 28 |

## ลำดับเรขาคณิต

- |                                |                             |                                 |  |
|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|--|
| 1. 1. ไม่เป็น                  | 2. เป็น ( $r = 4$ )         | 3. เป็น ( $r = 10$ )            | 4. เป็น ( $r = \frac{1}{5}$ )          |
| 5. เป็น ( $r = \frac{1}{10}$ ) | 6. เป็น ( $r = 1$ )         | 7. ไม่เป็น                      | 8. เป็น ( $r = -1$ )                   |
| 9. เป็น ( $r = \frac{1}{3}$ )  | 10. เป็น ( $r = \sqrt{3}$ ) | 11. เป็น ( $r = -\frac{1}{3}$ ) | 12. เป็น ( $r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ) |

13. ไม่เป็น                      14. เป็น ( $r = x$ )
2. 1.  $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$       2.  $a_n = 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$       3.  $a_n = 2 \cdot \sqrt{2}^{n-1}$       4.  $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
3. 128                      4.  $\frac{2}{9}$                       5.  $3\sqrt{3}$                       6. 11
7. 7                      8. 2, -4, 8 กับ 8, -4, 2                      9. -1, 9
10. 3                      11.  $\pm 2$                       12.  $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$  กับ  $a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$
13. 9                      14.  $a_n = (-3)(-2)^{n-1}$       15.  $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$       16.  $20 \cdot 2^{k-1}; 320$
17.  $900 \cdot (0.9)^{k-1}$       18.  $1100 \cdot (1.1)^{k-1}$       19.  $1100 \cdot (1.1)^{k-1}$       20. 1
21. 1                      22. 1                      23.  $16\sqrt{6}$                       24.  $125\sqrt{5}$
25. 2                      26. -1                      27.  $\frac{10}{3}$                       28. 5
29. 1, 2, 3

ตัวกลางเรขาคณิต

1. 1.  $\pm 12$                       2.  $\pm 10$                       3.  $15\sqrt{3}$                       4.  $\pm a^3$
2. 75
3.  $\pm 5, \pm 20$
- ให้จำนวนคู่นั้นคือ  $a$  และ  $b$  จากสูตรตัวกลางเรขาคณิต จะได้  $\pm\sqrt{ab} = \pm 10$   
 ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง จะได้  $ab = 100 \dots(1)$  และ จำนวนคู่นี้หารกันได้ 4 แสดงว่า  $\frac{b}{a} = 4 \dots(2)$   
 $(1) \times (2)$  จะได้  $ab \times \frac{b}{a} = 400 \rightarrow b^2 = 400 \rightarrow b = \pm 20$  แทนใน (1) จะได้  $a = \pm 5$
4. 12, 24                      5. 12, 18                      6.  $\mp 15, -45, \mp 135$
7.  $6\sqrt{2}, 24, 48\sqrt{2}, 192$                       8. 1, 16                      9.  $4, \frac{27}{2}$

อนุกรม

1. 1. 7                      2. 26
2. 1. 2                      2. 17
3. 1. 1                      2. 10                      3. 15                      4. 21
4. 1. -7                      2. -15                      3. -24                      4. 26
5.  $\frac{7}{12}$                       6. 57

สัญลักษณ์ซิกมา

1. 1.  $3 + 6 + 9 + \dots + 30$                       2.  $(-2) + (-3) + (-4) + \dots + (-6)$
3.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$                       4.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{7}{8}$
5.  $6 + 6 + 6 + 6 + 6$                       6.  $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4$
7.  $(-2 \cdot 2^2) + (-3 \cdot 2^3) + (-4 \cdot 2^4)$                       8.  $0 + 2 + 0 + 2 + \dots + 0 + 2$

9.  $(-1) + 2 + (-3) + 4 + \dots + (-9) + 10$       10.  $(2a_1 + 1) + (2a_2 + 1) + \dots + (2a_5 + 1)$
2. 1.  $\sum_{i=1}^5 2i$                       2.  $\sum_{i=1}^{11} 2i - 1$                       3.  $\sum_{i=1}^{10} \frac{2i-1}{2i}$                       4.  $\sum_{i=1}^6 \frac{1}{2^i}$
5.  $\sum_{i=1}^6 \frac{2i-1}{2^i}$                       6.  $\sum_{i=1}^7 2^{i-1}$                       7.  $\sum_{i=1}^{10} (i+1)^2$                       8.  $\sum_{i=1}^8 i(i+1)$
9.  $\sum_{i=1}^{10} a_i$                       10.  $\sum_{i=1}^n 2i$

อนุกรมเลขคณิต

1. 1. 1640                      2. 900                      3. 287                      4. 168
5. -28                      6. 155
2. 120                      3. 570                      4. 91                      5. 31
6. 10                      7. 6                      8. 16                      9. 10
10. 15                      11. 40                      12. 12                      13. 1548
14. 9200                      15. 19
16. 1. 344                      2. 13                      3. 23                      4. 8
17. 1071                      18. 3                      19. 390                      20. 2, 3
21. 24300, 242400                      22. -38                      23. 1300                      24. 125
25. -550                      26. 598

อนุกรมเรขาคณิต

1. 1. 255                      2. 728                      3. 129                      4. 665
5. 252                      6. 1020                      7. 5115                      8.  $\frac{211}{81}$
2. -342                      3. 279                      4. 66                      5. 682
6. 61                      7. 8
8. 1. 364                      2. 635
9. 4                      10. 171                      11. 511.5                      12. 1364
13.  $\frac{32}{3}$                       14. 12                      15. -2

**เครดิต**

ขอบคุณ คุณ Jam Geejee ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร