

คำชี้แจงการใช้แบบฝึกสำหรับครู

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียน การสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในการใช้ แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ ครูผู้สอนควรปฏิบัติตามขั้นตอน ต่อไปนี้

1. ศึกษาแบบฝึกทักษะและทำความเข้าใจกับเนื้อหาสาระก่อนนำไปใช้จัดกิจกรรม การเรียนสอน
2. ชี้แจงขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์นี้ให้นักเรียนเข้าใจและ เน้นย้ำความซื่อสัตย์ไม่ดูเฉลยก่อน หรือไม่ลอกเพื่อน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจบทบาทตัวเองใน การเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะ
3. ทดสอบความรู้ก่อนเรียนของนักเรียนโดยการทำแบบทดสอบก่อนเรียน เพื่อ ประเมินความรู้พื้นฐาน ของนักเรียน
4. แจ้งผลการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
5. ดำเนินการสอนตามกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ ควบคู่กับแผนการจัดการเรียนรู้
6. สังเกต ดูแล ช่วยเหลือคำแนะนำแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหาข้อสงสัยซักถาม
7. เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกทักษะเสร็จแล้ว ให้เปลี่ยนกันตรวจคำตอบภายในกลุ่ม จากเฉลยแบบฝึกทักษะ
8. ประเมินผลการเรียนของนักเรียนอย่างต่อเนื่องและให้แรงเสริมในการปฏิบัติ กิจกรรมของนักเรียน
9. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เมื่อศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้และทำ แบบฝึกทักษะเสร็จสิ้น เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน

คำชี้แจงการใช้แบบฝึกสำหรับนักเรียน

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเชิงซ้อนใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ การสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้นักเรียนควรปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. อ่านคำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียนให้เข้าใจก่อนศึกษา
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อประเมินความรู้พื้นฐานของนักเรียน
3. ศึกษาเนื้อหาในใบความรู้และทำกิจกรรมในแบบฝึกทักษะด้วยตนเองถ้าทำแบบฝึกทักษะไม่ได้ให้กลับไปศึกษาเนื้อหาใหม่อีกครั้งหรือปรึกษาครูผู้สอน
4. ทำแบบทดสอบหลังเรียนเมื่อศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะเสร็จสิ้นเพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
5. การทำกิจกรรมในแบบฝึกทักษะแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนให้นักเรียนตั้งใจทำและมีความซื่อสัตย์โดยไม่เปิดดูเฉลยก่อน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบเรื่องนี้แล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าคู่อันดับ (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อน
2. เขียนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ในรูป $a + bi$ และเขียนจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ในรูป (a, b) ได้
3. ระบุส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้
4. คำนวณจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปของ i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกได้



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านคำถามต่อไปนี้ที่ละข้อ แล้วกาเครื่องหมาย × ลงในช่องใต้ตัวอักษร ก ข ค และ ง ที่นักเรียนเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ข้อใด **ไม่** ถูกต้อง

ก. $2\sqrt{-4} = 4i$

ข. $3\sqrt{-16} = 12i$

ค. $\sqrt{-20} = 2\sqrt{5}i$

ง. $4\sqrt{-12} = 24i$

2. $3\sqrt{-81}$ เขียนให้อยู่ในรูปของหน่วยจินตภาพได้อย่างไร

ก. $3 - 9i$

ข. $3 + 9i$

ค. $-27i$

ง. $27i$

3. ข้อใด **ไม่ใช่** จำนวนเชิงซ้อน

ก. $(2, \sqrt{3})$

ข. $(0, 1)$

ค. $(5, \sqrt{-9})$

ง. $(\frac{3}{2}, \pi)$

4. ข้อใด **ไม่** ถูกต้อง

ก. 5 ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ข. ค่าของ i ในจำนวนเชิงซ้อน คือ $\sqrt{-1}$

ค. จำนวนเชิงซ้อน $(1, 3)$ มีส่วนจริงเป็น 1 และส่วนจินตภาพเป็น 3

ง. $2 + 6i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 2 และส่วนจินตภาพเป็น 6

ใบความรู้ที่ 1.1

เรื่อง ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

ในระบบจำนวนจริงสมการพหุนามบางสมการ เช่น $x^2 + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบเนื่องจากกำลังสองของจำนวนใดๆจะมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอจึงไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการแต่นักคณิตศาสตร์ต้องการสร้างระบบจำนวนซึ่งขยายออกไปเพื่อให้หาคำตอบของสมการพหุนามได้เสมอและเรียกจำนวนในระบบที่สร้างขึ้นใหม่นี้ว่า “จำนวนเชิงซ้อน” (Complex number) ซึ่งเซตของจำนวนในระบบใหม่นี้ต้องเป็นเซตที่มีเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซต

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อนคือคู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงและกำหนดการเท่ากันการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

1. การเท่ากัน $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2. การบวก $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. การคูณ $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

อาจแทน $(a, b) \cdot (c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$ ก็ได้

เซตของจำนวนเชิงซ้อนเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \mathbb{C}

บทนิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

เรียก a ว่าส่วนจริง (real part) ของ Z และแทนด้วย $\text{Re}(z)$

เรียก b ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ Z และแทนด้วย $\text{Im}(z)$

จากบทนิยามนี้อาจกล่าวได้ว่าจำนวนจริงก็คือจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์แต่ส่วนจินตภาพไม่ใช่ศูนย์เรียกว่าจำนวนจินตภาพแท้ (purely imaginary number)

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปของหน่วยจินตภาพ

จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $(0, b)$ สามารถเขียนในรูปหน่วยจินตภาพได้เป็น bi

จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป (a, b) เขียนในรูปหน่วยจินตภาพได้เป็น $a + bi$

สามารถสรุปลักษณะต่างๆของจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b) = a + bi$ ได้ดังนี้

1. ถ้า $a = 0$ และ $b \neq 0$ จะได้ $z = bi$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพและเรียก

จำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า **จำนวนจินตภาพแท้**

2. ถ้า $a \neq 0$ และ $b = 0$ จะได้ $z = a$ ซึ่งเป็น **จำนวนจริง a** นั่นคือจำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็น 0

3. ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จะได้ $z = a + bi$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

ตัวอย่างที่ 1

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่รูปของ $a + bi$

1. จำนวนเชิงซ้อน $(4, 1)$ คือ $4 + i$
2. จำนวนเชิงซ้อน $(0, -9)$ คือ $-9i$
3. จำนวนเชิงซ้อน $(-3, 8)$ คือ $-3 + 8i$
4. จำนวนเชิงซ้อน $(-4, -3)$ คือ $-4 - 3i$
5. จำนวนเชิงซ้อน $(5, -1)$ คือ $5 - i$

ตัวอย่างที่ 2

จงบอกส่วนจริง $\text{Re}(z)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. จำนวนเชิงซ้อน $(5, 8)$ | มีส่วนจริง $\text{Re}(z)$ คือ 5 | ส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$ คือ 8 |
| 2. จำนวนเชิงซ้อน $(8, -2)$ | มีส่วนจริง $\text{Re}(z)$ คือ 8 | ส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$ คือ -2 |
| 3. จำนวนเชิงซ้อน $-7 - 4i$ | มีส่วนจริง $\text{Re}(z)$ คือ -7 | ส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$ คือ -4 |
| 4. จำนวนเชิงซ้อน $1 - 9i$ | มีส่วนจริง $\text{Re}(z)$ คือ 1 | ส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$ คือ -9 |
| 5. จำนวนเชิงซ้อน $5 + 3i$ | มีส่วนจริง $\text{Re}(z)$ คือ 5 | ส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$ คือ 3 |

แบบฝึกทักษะที่ 1.1

คำชี้แจง จงพิจารณาคู่อันดับในตารางต่อไปนี้แล้วตอบคำถาม

ข้อ	โจทย์	จำนวนเชิงซ้อน		เหตุผล
		เป็น	ไม่เป็น	
1	$(5, 8)$			
2	$(\sqrt{-3}, 1)$			
3	$(-7, 2^5)$			
4	$(0, \pi)$			
5	$(-2.5, 4.8)$			
6	$(-1, \sqrt{-2})$			
7	$(-5, \sqrt{5})$			
8	$(\sqrt{3} + 5, 2)$			
9	$(1, \sqrt{-4})$			
10	$(\sqrt{-9}, 3\frac{1}{2})$			

สรุป จำนวนเชิงซ้อน(Complex number) คือ

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 1.2

ตอนที่ 1 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ $a + bi$

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)	จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$	ส่วนจริง a	ส่วนจินตภาพ b
1	(6, -3)			
2	(4, $\sqrt{3}$)			
3	(0, 8)			
4	(-5, 0)			
5	(2, π)			

ตอนที่ 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ $(a + b)$

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$	จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)	ส่วนจริง a	ส่วนจินตภาพ b
1	12			
2	$\sqrt{3}i$			
3	-9i			
4	$4 + 3i$			
5	$-2 - 2i$			

สรุป จำนวนเชิงซ้อน (a, b) สามารถเขียนแทนด้วย

เรียก ว่าส่วนจริง (real part) ของ z และแทนด้วย $\text{Re}(z)$

เรียก ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z และแทนด้วย $\text{Im}(z)$

แบบฝึกทักษะที่ 1.3

คำชี้แจง กำหนดจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$	จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)	ส่วนจริง a	ส่วนจินตภาพ b
1	$3 + 0i$	$(3, 0)$		
2		$(-2, 0)$		
3	$9 + 0i$			
4	$-5 - i$			
5	$-4 + 6i$	$(-4, 6)$		
6		$(-2, -3)$		
7	$\sqrt{3} + i$			
8	$8i$			
9		$(0, -7)$		
10		$(0, -1)$		

สรุป จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปของ (a, b) สามารถเขียนแทนด้วย $a + bi$

เรียก a ว่า..... เรียก b ว่า.....

- ถ้า $b = 0$ จะได้ $(a, 0)$ เขียนแทนด้วย a เรียกจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า
จำนวน..... (ดังปรากฏในข้อ))
- ถ้า $b \neq 0$ และ $a = 0$ จะได้ $(0, b)$ เขียนแทนด้วย bi เรียกจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า
จำนวน..... (ดังปรากฏในข้อ))

แบบฝึกทักษะที่ 1.4

ตอนที่ 1 จงพิจารณาจำนวนต่อไปนี้แล้วขีดเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือ
ขีดเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อที่ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

- 1. (3, 8)
 2. (i, 8)
 3. $(0, \sqrt{2})$
 4. $(-5, \pi)$
 5. $(-\sqrt{2}, -3i)$
 6. $9 + \sqrt{3}i$
 7. $-6 + \sqrt{-5}$
 8. $-8i$
 9. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$
 10. $(4, 2^5)$

ตอนที่ 2 กำหนดจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$	จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)	ส่วนจริง a	ส่วนจินตภาพ b
1		$(-3, -5)$		
2		$(-7, 6)$		
3	$\sqrt{2} + 3i$			
4	$4i$			
5	15			

ใบความรู้ที่ 1.2

เรื่อง หน่วยจินตภาพ (Imaginary unit)

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน $(0,1)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{-1}$ หรือ i โดยที่ $i^2 = -1$ เรียก i ว่าหน่วยจินตภาพ (imaginary unit)

เมื่อ

$$\begin{aligned}
 i &= \sqrt{-1} \\
 i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1 \\
 i^3 &= i^2 i = -i \\
 i^4 &= (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \\
 i^9 &= (i^4)^2 i = (-1)^2 i = i \\
 i^{14} &= (i^4)^3 i^2 = i^2 = -1 \\
 i^{23} &= (i^4)^5 i^3 = i^3 = -i \\
 i^{24} &= (i^4)^6 = 1^6 = 1
 \end{aligned}$$

สรุป ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้

$$\begin{aligned}
 i^n &= 1 \\
 i^{4n+1} &= i \\
 i^{4n+2} &= -1 \\
 i^{4n+3} &= -i
 \end{aligned}$$

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปของหน่วยจินตภาพ

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกต่อไปนี้

1. i^{12} มีค่าเท่ากับ 1

เนื่องจากจัดในรูป $i^{4(3)+0}$ หรือ $\frac{12}{4}$ จะได้ 3 เหลือเศษ 0

2. i^{17} มีค่าเท่ากับ 1

เนื่องจากจัดในรูป $i^{4(4)+1}$ หรือ $\frac{17}{4}$ จะได้ 4 เหลือเศษ 1

3. i^{22} มีค่าเท่ากับ 1

เนื่องจากจัดในรูป $i^{4(5)+2}$ หรือ $\frac{22}{4}$ จะได้ 5 เหลือเศษ 2

4. i^{23} มีค่าเท่ากับ 1

เนื่องจากจัดในรูป $i^{4(5)+3}$ หรือ $\frac{23}{4}$ จะได้ 5 เหลือเศษ 3

ตัวอย่างที่ 2

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปหน่วยจินตภาพ

$$\begin{aligned} 1. \sqrt{-81} &= \sqrt{81} \times \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{9 \times 9} \times i && (\text{จาก } \sqrt{-1} = i) \\ &= 9i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. 3 + \sqrt{-50} &= 3 + \sqrt{50} \times \sqrt{-1} \\ &= 3 + \sqrt{2 \times 5 \times 5} \times i && (\text{จาก } \sqrt{-1} = i) \\ &= 3 + 5\sqrt{2}i \end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.5

ตอนที่ 1 จงหาค่า i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกต่อไปนี้

ข้อ	i^k	จัดรูป i^k ให้อยู่ในรูป i^{4n+r} เมื่อ r คือเศษและ $n \in \mathbb{I}^+$	ผลลัพธ์
1	i^8	$i^{4(2)}$	1
2	i^{13}	$i^{4(3)+1}$	i
3	i^{26}	$i^{4(6)+2}$	-1
4	i^{31}		
5	i^{32}		
6	i^{43}		
7	i^{21}		
8	i^{38}		
9	i^{99}		
10	i^{100}		

สรุป ค่าของ i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกจะมีค่าแตกต่างกันเพียง 4 ค่าเท่านั้น คือ $1, i, -1, -i$ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ k เนื่องจากเมื่อ k หารด้วย 4 จะได้ $k = 4n + r$ โดยที่ $r = 0, 1, 2, 3$ เท่านั้น (r คือเศษ) ดังนั้น ค่าของ i^k หาได้จาก

- เมื่อ k หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 0 $i^k = \dots\dots\dots$
- เมื่อ k หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 1 $i^k = \dots\dots\dots$
- เมื่อ k หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 2 $i^k = \dots\dots\dots$
- เมื่อ k หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 $i^k = \dots\dots\dots$

ตอนที่ 2 จงหาค่า i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกต่อไปนี้

ข้อ	i^k	วิธีทำ $(\frac{k}{4})$	เศษ	ผลลัพธ์
1	i^{20}			
2	i^{78}			
3	i^{99}			
4	i^{248}			
5	i^{555}			
6	i^{561}			
7	i^{1992}			
8	i^{2802}			
9	i^{4303}			
10	i^{5513}			

แบบฝึกทักษะที่ 1.6

ตอนที่ จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของหน่วยจินตภาพ

1. $\sqrt{-9}$
 วิธีทำ $\sqrt{-9} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

แต่ $\sqrt{-1} = i$
 ดังนั้น $\sqrt{-9} = \dots\dots\dots$

2. $\sqrt{-64}$
 วิธีทำ $\sqrt{-64} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

แต่ $\sqrt{-1} = i$
 ดังนั้น $\sqrt{-64} = \dots\dots\dots$

3. $2\sqrt{-25}$
 วิธีทำ $2\sqrt{-25} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

แต่ $\sqrt{-1} = i$
 ดังนั้น $2\sqrt{-25} = \dots\dots\dots$

ตอนที่ 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของหน่วยจินตภาพ

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อน	วิธีทำ	เขียนให้อยู่ในรูป หน่วยจินตภาพ
1	$\sqrt{-4}$		
2	$\sqrt{-50}$		
3	$\sqrt{-100}$		
4	$\sqrt{-121}$		
5	$3\sqrt{-8}$		
6	$2 + \sqrt{-3}$		
7	$-4 + \sqrt{-5}$		
8	$7 - \sqrt{-2}$		
9	$5 + \sqrt{-49}$		
10	$\frac{2}{3}\sqrt{-9}$		

แบบฝึกทักษะที่ 1.7

คำชี้แจง จงขีดเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างตามชนิดของจำนวนนั้นที่กำหนดให้

ข้อ	จำนวน	ชนิดของจำนวน					
		จำนวนเชิงซ้อน	จำนวนจินตภาพแท้	จำนวนจริง	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนเต็ม
1	3						
2	-9						
3	$\sqrt{5}$						
4	-6i						
5	$3 + 2i$						
6	0						
7	$\sqrt{-2}$						
8	$\sqrt{4}$						
9	π						
10	$-2 - i$						

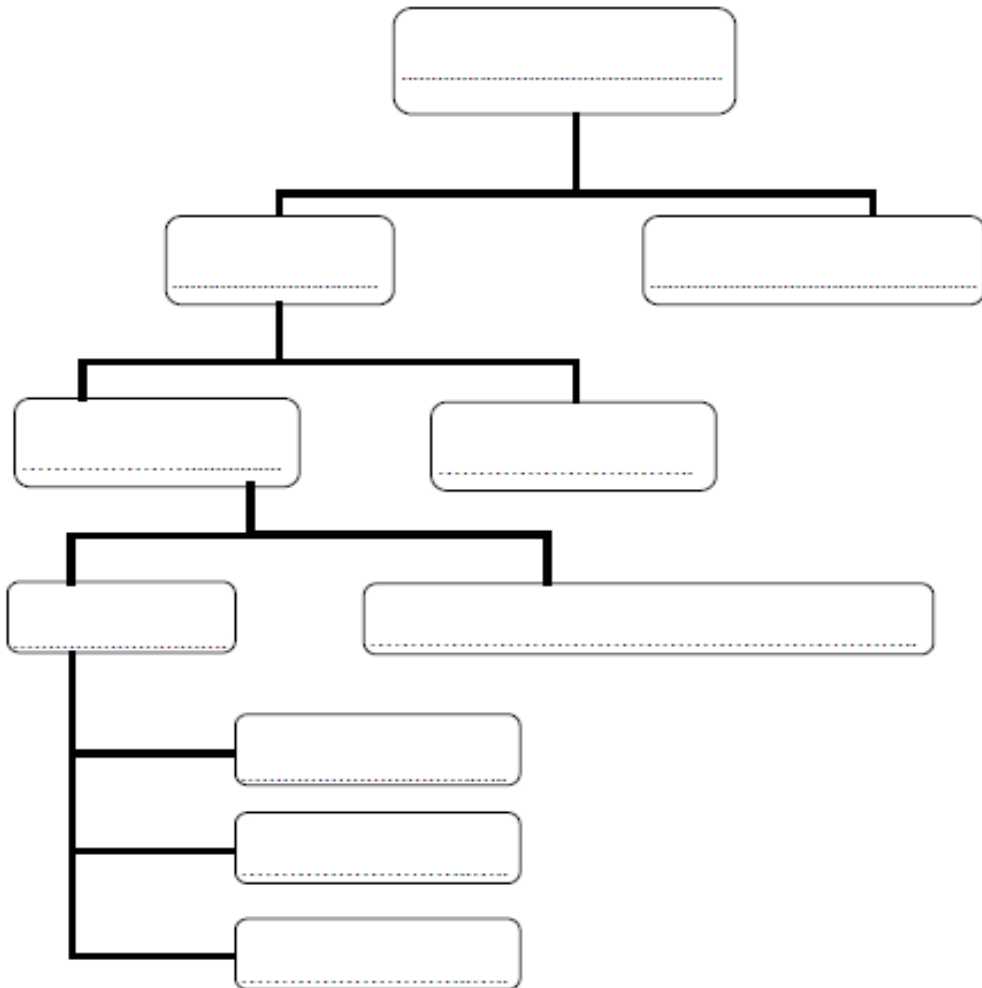
ตอนที่ 2 จงขีดเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อที่ถูกต้องและขีดเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อที่ผิด

- 1. $(-1, \sqrt{-9})$ ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน 9
- 2. 3 ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน
- 3. ค่าของ i ในจำนวนเชิงซ้อนแทนค่ารากที่สองของ 1
- 4. $5 - 7i$ เขียนเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่อันดับคือจำนวนเชิงซ้อน $(5, 7)$
- 5. จำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ $b = 0$ นั่นคือจำนวนจริง a
- 6. $2 + 4i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 2 และส่วนจินตภาพเป็น 4

ตอนที่ 3 จงเติมคำในช่องว่างเพื่อสรุปแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของโครงสร้างจำนวนเชิงซ้อนให้ถูกต้องโดยเลือกจากคำต่อไปนี้

จำนวนเต็ม	จำนวนตรรกยะ	จำนวนเชิงซ้อน
จำนวนจินตภาพ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม
จำนวนจริง	จำนวนเต็มลบ	จำนวนเต็มบวก ศูนย์

โครงสร้างของระบบจำนวนเชิงซ้อน



แบบทดสอบหลังเรียน

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านคำถามต่อไปนี้ที่ละข้อ แล้วกาเครื่องหมาย × ลงในช่องใต้ตัวอักษร ก ข ค และ ง ที่นักเรียนเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ข้อใด**ไม่ใช่**จำนวนเชิงซ้อน

ก. $(2, \sqrt{3})$

ข. $(0, 1)$

ค. $(5, \sqrt{-9})$

ง. $(\frac{3}{2}, \pi)$

2. จำนวนเชิงซ้อน $(-8, -7)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a + bi$ ได้ดังข้อใด

ก. $8 + 7i$

ข. $8 - 7i$

ค. $-8 - 7i$

ง. $-8 + 7i$

3. ข้อใดมีค่าเป็นจำนวนจริง

ก. $9i^6$

ข. $2i^{11}$

ค. $4i^{17}$

ง. $7 - 5i$

4. ข้อใด **ไม่** ถูกต้อง

ก. $2\sqrt{-4} = 4i$

ข. $3\sqrt{-16} = 12i$

ค. $\sqrt{-20} = 2\sqrt{5}i$

ง. $4\sqrt{-12} = 24i$

5. ข้อใด **ไม่** ถูกต้อง

ก. 5 ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ข. ค่าของ i ในจำนวนเชิงซ้อน คือ $\sqrt{-1}$

ค. จำนวนเชิงซ้อน $(1, 3)$ มีส่วนจริงเป็น 1 และส่วนจินตภาพเป็น 3

ง. $2 + 6i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 2 และส่วนจินตภาพเป็น 6

กระดาษคำตอบ

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

ข้อที่	แบบทดสอบก่อนเรียน			
	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

ข้อที่	แบบทดสอบหลังเรียน			
	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

เต็ม 10 คะแนน
ได้ คะแนน

เต็ม 10 คะแนน
ได้ คะแนน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1

คำชี้แจง จงพิจารณาคู่อันดับในตารางต่อไปนี้แล้วตอบคำถาม

ข้อ	โจทย์	จำนวนเชิงซ้อน		เหตุผล
		เป็น	ไม่เป็น	
1	(5, 8)	✓		5 และ $8 \in \mathbb{R}$
2	$(\sqrt{-3}, 1)$	✓		$\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$
3	$(-7, 2^5)$	✓		-7 และ $2^5 \in \mathbb{R}$
4	$(0, \pi)$	✓		0 และ $\pi \in \mathbb{R}$
5	$(-2.5, 4.8)$	✓		-2.5 และ $4.8 \in \mathbb{R}$
6	$(-1, \sqrt{-2})$		✓	$\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$
7	$(-5, \sqrt{5})$	✓		-5 และ $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$
8	$(\sqrt{3} + 5, 2)$	✓		$\sqrt{3} + 5$ และ $2 \in \mathbb{R}$
9	$(1, \sqrt{-4})$		✓	$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
10	$(\sqrt{-9}, 3\frac{1}{2})$		✓	$\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

สรุป จำนวนเชิงซ้อน(Complex number) คือ คู่อันดับ (a,b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2

ตอนที่ 1 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ $a + bi$

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)	จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$	ส่วนจริง a	ส่วนจินตภาพ b
1	(6, -3)	$6 - 3i$	6	-3
2	$(4, \sqrt{3})$	$4 + \sqrt{3}i$	4	$\sqrt{3}$
3	(0, 8)	$8i$	0	8
4	(-5, 0)	$-5 + 0i$	-5	0
5	$(2, \pi)$	$2 + \pi i$	2	π

ตอนที่ 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ $(a + b)$

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$	จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)	ส่วนจริง a	ส่วนจินตภาพ b
1	12	(12, 0)	12	0
2	$\sqrt{3}i$	$(0, \sqrt{5})$	0	$\sqrt{5}$
3	$-9i$	(0, -9)	0	-9
4	$4 + 3i$	(4, 3)	4	3
5	$-2 - 2i$	(-2, -2)	-2	-2

สรุป จำนวนเชิงซ้อน (a, b) สามารถเขียนแทนด้วย $a + bi$

เรียก a ว่าส่วนจริง (real part) ของ z และแทนด้วย $\text{Re}(z)$

เรียก b ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z และแทนด้วย $\text{Im}(z)$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.3

คำชี้แจง กำหนดจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$	จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)	ส่วนจริง a	ส่วนจินตภาพ b
1	$3 + 0i$	$(3, 0)$	3	0
2	$-2 + 0i$	$(-2, 0)$	-2	0
3	$9 + 0i$	$(9, 0)$	9	0
4	$-5 - i$	$(-5, -1)$	-5	-1
5	$-4 + 6i$	$(-4, 6)$	-4	6
6	$-2 - 3i$	$(-2, -3)$	2	-3
7	$\sqrt{3} + i$	$(\sqrt{3}, i)$	$\sqrt{3} +$	11
8	$8i$	$(0, 8)$	0	8
9	$-7i$	$(0, -7)$	0	-7
10	$-i$	$(0, -1)$	0	-1

สรุป จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปของ (a, b) สามารถเขียนแทนด้วย $a + bi$
เรียก a ว่าส่วนจริง เรียก b ว่าส่วนจินตภาพ

- ถ้า $b = 0$ จะได้ $(a, 0)$ เขียนแทนด้วย a เรียกจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า
จำนวนจริง a (ดังปรากฏในข้อ 1 - 3)
- ถ้า $b \neq 0$ และ $a = 0$ จะได้ $(0, b)$ เขียนแทนด้วย bi เรียกจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า
จำนวนจินตภาพแท้ (ดังปรากฏในข้อ 8 - 10)

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4

ตอนที่ 1 จงพิจารณาจำนวนต่อไปนี้แล้วขีดเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือ
ขีดเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อที่ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

- ✓ 1. (3, 8)
- ✗ 2. (i, 8)
- ✓ 3. $(0, \sqrt{2})$
- ✓ 4. $(-5, \pi)$
- ✗ 5. $(-\sqrt{2}, -3i)$
- ✓ 6. $9 + \sqrt{3}i$
- ✓ 7. $-6 + \sqrt{-5}$
- ✓ 8. $-8i$
- ✓ 9. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$
- ✓ 10. $(4, 2^5)$

ตอนที่ 2 กำหนดจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$	จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b)	ส่วนจริง a	ส่วนจินตภาพ b
1	$-3 - 5i$	$(-3, -5)$	-3	-5
2	$-7 + 6i$	$(-7, 6)$	-7	6
3	$\sqrt{2} + 3i$	$(\sqrt{2}, 3)$	$\sqrt{2} +$	3
4	$4i$	$(0, 4)$	0	4
5	15	$(15, 0)$	15	0

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.5

ตอนที่ 1 จงหาค่า i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกต่อไปนี้

ข้อ	i^k	จัดรูป i^k ให้อยู่ในรูป i^{4n+r} เมื่อ r คือเศษและ $n \in \mathbb{I}^+$	ผลลัพธ์
1	i^8	$i^{4(2)}$	1
2	i^{13}	$i^{4(3)+1}$	i
3	i^{26}	$i^{4(6)+2}$	-1
4	i^{31}	$i^{4(7)+3}$	$-i$
5	i^{32}	$i^{4(8)}$	1
6	i^{43}	$i^{4(10)+3}$	$-i$
7	i^{21}	$i^{4(5)+1}$	i
8	i^{38}	$i^{4(9)+2}$	-1
9	i^{99}	$i^{4(24)+3}$	$-i$
10	i^{100}	$i^{4(25)}$	1

สรุป ค่าของ i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกจะมีค่าแตกต่างกันเพียง 4 ค่าเท่านั้น คือ $1, i, -1, -i$ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ k เนื่องจากเมื่อ k หารด้วย 4 จะได้ $k = 4n + r$ โดยที่ $r = 0, 1, 2, 3$ เท่านั้น (r คือเศษ) ดังนั้น ค่าของ i^k หาได้จาก

- เมื่อ k หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 0 $i^k = 1$
- เมื่อ k หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 1 $i^k = i$
- เมื่อ k หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 2 $i^k = -1$
- เมื่อ k หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 $i^k = -i$

ตอนที่ 2 จงหาค่า i^k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกต่อไปนี้

ข้อ	i^k	วิธีทำ ($\frac{k}{4}$)	เศษ	ผลลัพธ์
1	i^{20}	$\frac{20}{4}$	0	1
2	i^{78}	$\frac{78}{4}$	2	-1
3	i^{99}	$\frac{99}{4}$	3	-i
4	i^{248}	$\frac{248}{4}$	0	1
5	i^{555}	$\frac{555}{4}$	3	-i
6	i^{561}	$\frac{561}{4}$	1	i
7	i^{1992}	$\frac{1992}{4}$	0	1
8	i^{2802}	$\frac{2802}{4}$	2	-1
9	i^{4303}	$\frac{4303}{4}$	3	-i
10	i^{5513}	$\frac{5513}{4}$	1	i

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.6

ตอนที่ จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้อยู่ในรูปของหน่วยจินตภาพ

1. $\sqrt{-9}$

วิธีทำ $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times (-1)}$
 $= \sqrt{3 \times 3 \times (-1)}$
 $= 3 \times \sqrt{-1}$

แต่ $\sqrt{-1} = i$

ดังนั้น $\sqrt{-9} = 3i$

2. $\sqrt{-64}$

วิธีทำ $\sqrt{-64} = \sqrt{64 \times (-1)}$
 $= \sqrt{8 \times 8 \times (-1)}$
 $= 8 \times \sqrt{-1}$

แต่ $\sqrt{-1} = i$

ดังนั้น $\sqrt{-64} = 8i$

3. $2\sqrt{-25}$

วิธีทำ $2\sqrt{-25} = 2\sqrt{25 \times (-1)}$
 $= 2\sqrt{5 \times 5 \times (-1)}$
 $= 2 \times 5 \times \sqrt{-1}$

แต่ $\sqrt{-1} = i$

ดังนั้น $2\sqrt{-25} = 10i$

ตอนที่ 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของหน่วยจินตภาพ

ข้อ	จำนวนเชิงซ้อน	วิธีทำ	เขียนให้อยู่ในรูป หน่วยจินตภาพ
1	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{-1}$	$2i$
2	$\sqrt{-50}$	$\sqrt{2 \times 5 \times 5} \times \sqrt{-1}$	$5\sqrt{2}i$
3	$\sqrt{-100}$	$\sqrt{10 \times 10} \times \sqrt{-1}$	$10i$
4	$\sqrt{-121}$	$\sqrt{11 \times 11} \times \sqrt{-1}$	$11i$
5	$3\sqrt{-8}$	$3\sqrt{2 \times 2 \times 2} \times \sqrt{-1}$	$6\sqrt{2}i$
6	$2 + \sqrt{-3}$	$2 + (\sqrt{3} \times \sqrt{-1})$	$2 + \sqrt{3}i$
7	$-4 + \sqrt{-5}$	$-4 - (\sqrt{5} \times \sqrt{-1})$	$-4 + \sqrt{5}i$
8	$7 - \sqrt{-2}$	$7 - (\sqrt{2} \times \sqrt{-1})$	$7 - \sqrt{2}i$
9	$5 + \sqrt{-49}$	$5 + (\sqrt{7 \times 7} \times \sqrt{-1})$	$5 + 7i$
10	$\frac{2}{3}\sqrt{-9}$	$\frac{2}{3} + (\sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{-1})$	$2i$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7

คำชี้แจง จงขีดเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างตามชนิดของจำนวนนั้นที่กำหนดให้

ข้อ	จำนวน	ชนิดของจำนวน					
		จำนวนเชิงซ้อน	จำนวนจินตภาพแท้	จำนวนจริง	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนเต็ม
1	3	✓		✓	✓		✓
2	-9	✓		✓	✓		✓
3	$\sqrt{5}$	✓		✓		✓	
4	$-6i$	✓	✓				
5	$3 + 2i$	✓					
6	0	✓		✓	✓		✓
7	$\sqrt{-2}$	✓	✓				
8	$\sqrt{4}$	✓		✓	✓		✓
9	π	✓		✓		✓	
10	$-2 - i$	✓					

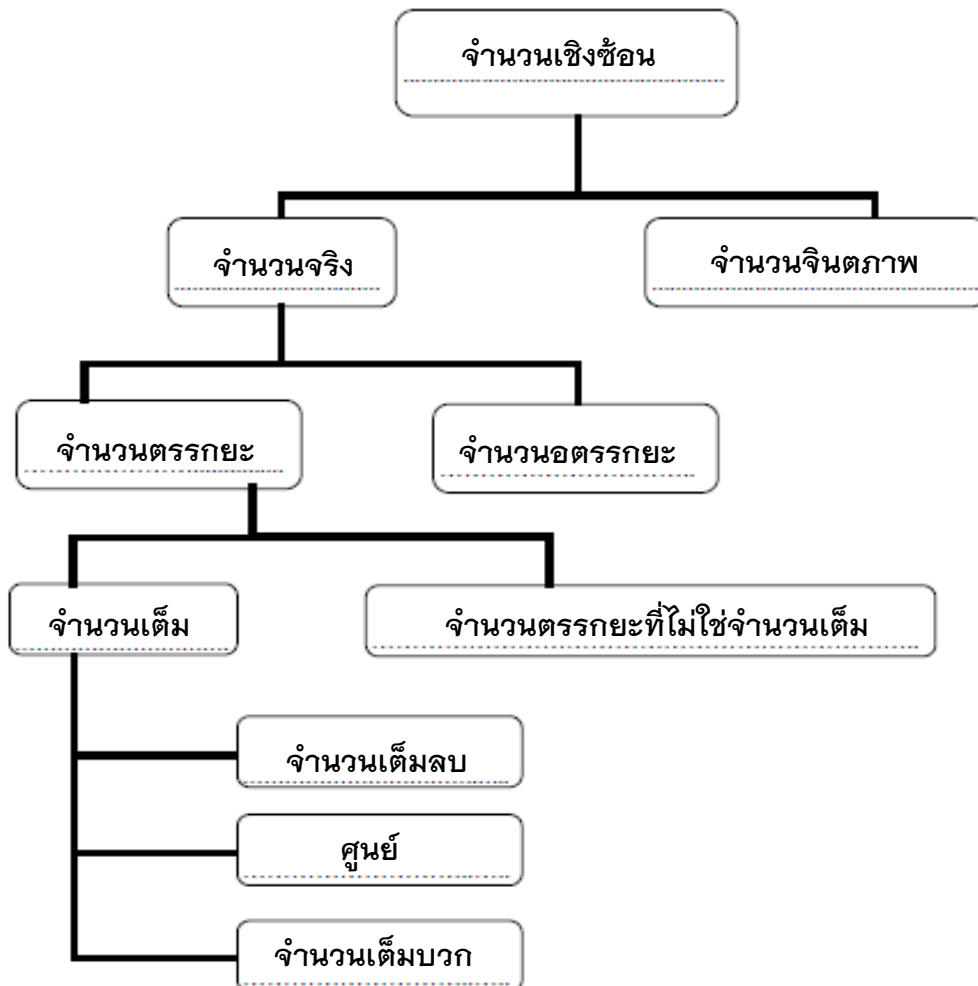
ตอนที่ 2 จงขีดเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อที่ถูกต้องและขีดเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อที่ผิด

- ✓ 1. $(-1, \sqrt{-9})$ ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน 9
- ✗ 2. 3 ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน
- ✗ 3. ค่าของ i ในจำนวนเชิงซ้อนแทนค่ารากที่สองของ 1
- ✗ 4. $5 - 7i$ เขียนเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่อันดับคือจำนวนเชิงซ้อน $(5, 7)$
- ✓ 5. จำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ $b = 0$ นั่นคือจำนวนจริง a
- ✓ 6. $2 + 4i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 2 และส่วนจินตภาพเป็น 4

ตอนที่ 3 จงเติมคำในช่องว่างเพื่อสรุปแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของโครงสร้างจำนวนเชิงซ้อนให้ถูกต้องโดยเลือกจากคำต่อไปนี้

จำนวนเต็ม	จำนวนตรรกยะ	จำนวนเชิงซ้อน
จำนวนจินตภาพ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม
จำนวนจริง	จำนวนเต็มลบ	จำนวนเต็มบวก ศูนย์

โครงสร้างของระบบจำนวนเชิงซ้อน



เฉลยแบบทดสอบ

แบบทดสอบ
ก่อนเรียน

ข้อ 1	ข้อ 2	ข้อ 3	ข้อ 4	ข้อ 5
ง	ง	ค	ก	ค
ข้อ 6	ข้อ 7	ข้อ 8	ข้อ 9	ข้อ 10
ค	ข	ข	ง	ก

แบบทดสอบ
หลังเรียน

ข้อ 1	ข้อ 2	ข้อ 3	ข้อ 4	ข้อ 5
ค	ค	ก	ง	ก
ข้อ 6	ข้อ 7	ข้อ 8	ข้อ 9	ข้อ 10
ข	ง	ง	ค	ข



บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2550). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5 เล่ม 2**. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2549). **คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- _____. (2551). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : ชุมชนสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (มปป.). **หนังสือเรียนเสริมมาตรฐานแม่ค คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ : แม่ค จำกัด.
- สถาบันกวดวิชา เดอะเบรน (2548). **เอกสารประกอบการเรียน คอร์ส ENTRANCE สายวิทย์ วิชาคณิตศาสตร์ 1 เล่ม 4**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงเรียนเดอะเบรน.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2553). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม. 4 – 6 เล่ม 4**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค.
- _____. (2551). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : สกสค.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. (มปป.). **คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 4**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (มปป.) **คู่มือคณิตศาสตร์ ม. 4 – 5 – 6**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.