ยนรู้ที่ 2

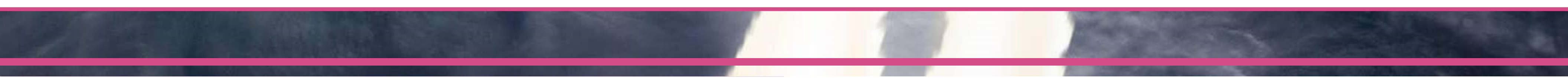
ลัสเบื้องต้น

ยนรู้

จสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้

นุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

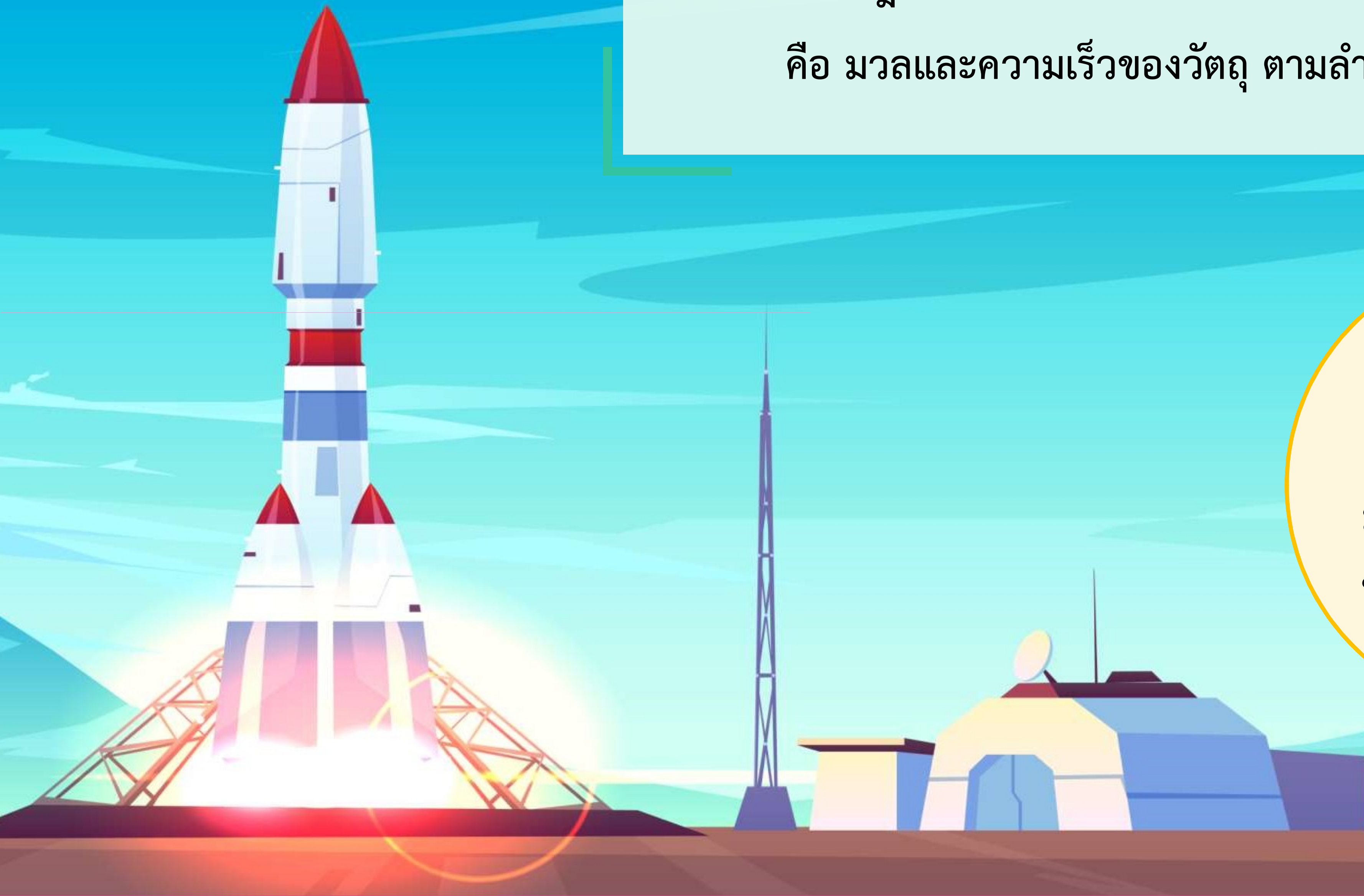


รวดขึ้นไปยังอวกาศ จะต้องใช้แรงขับเคลื่อนที่สูงมาก
งเพื่อเอาชนะแรงโน้มถ่วง โดยจะต้องมีการเผาไหม้
ทำให้มวลของจรวดลดลงตามเวลาที่เชื้อเพลิงถูก
ะทำให้เกิดความเร่งที่สูงมากในการเคลื่อนที่ของจรวด

แรงขับเคลื่อนของจรวดหาได้จากสูตร $\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{d(mv)}}{\mathbf{dt}}$

ซึ่งมาจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน โดย $\mathbf{m}$ และ $\mathbf{v}$

คือ มวลและความเร็วของวัตถุ ตามลำดับ

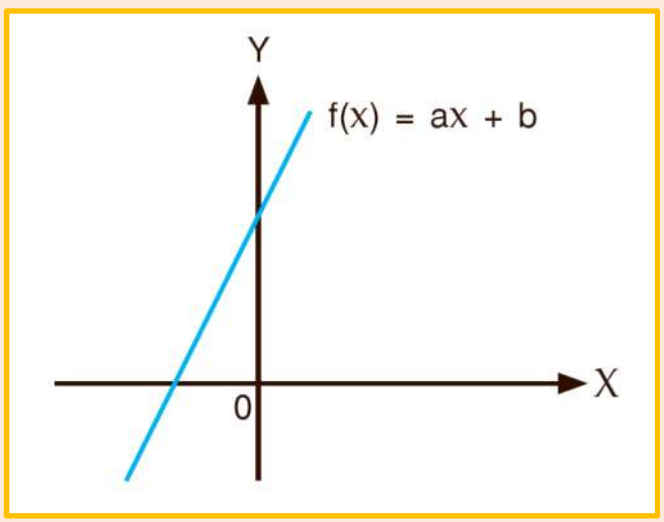


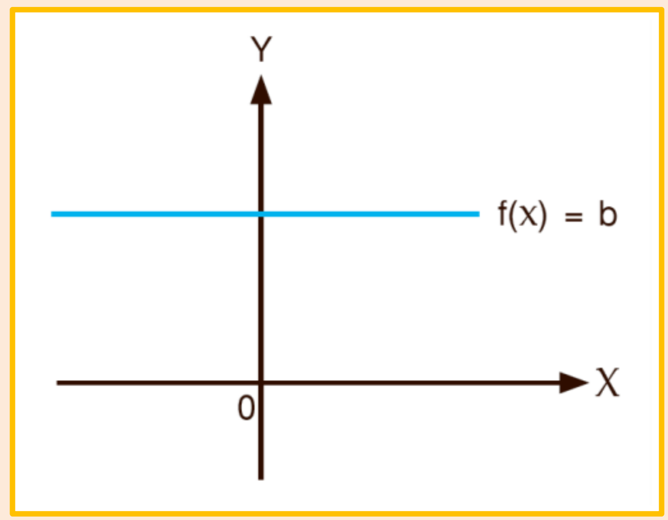
เราจะนำความ
เกี่ยวกับแคลคูล
มาหาแรงขับเคลื่
ของจรวดได้อย่าง

ก่อนที่เราจะศึกษาความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัส
เราไปทบทวนความรู้ที่นำมาใช้ในเรื่องแคลคูลัสกันก่อนเลยค่ะ

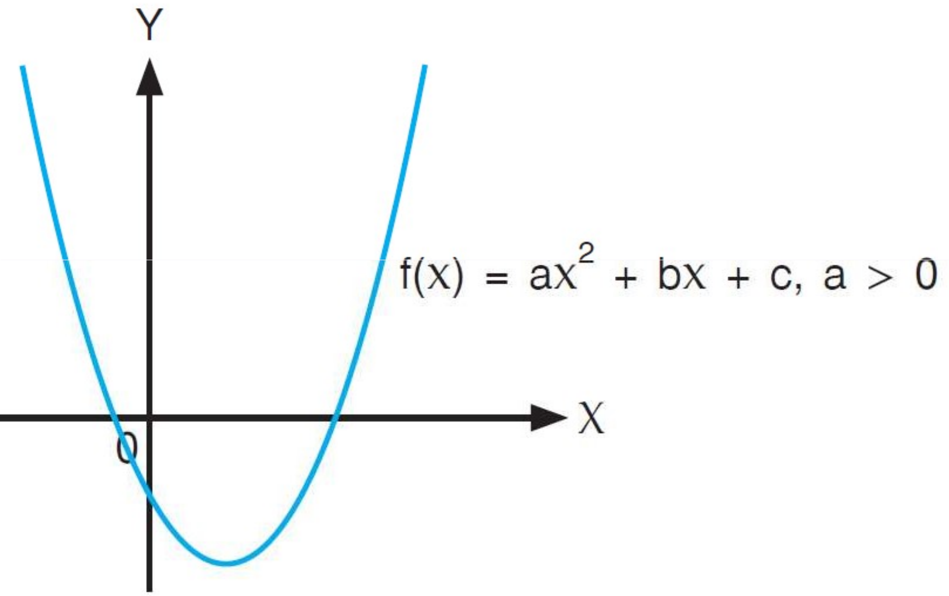
ก์ชันเชิงเส้น คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

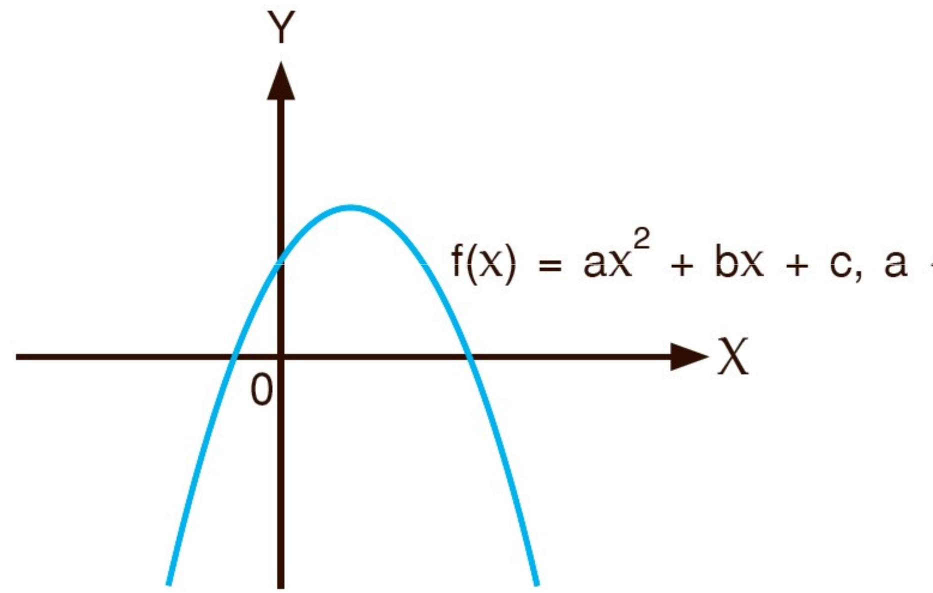
กรณี $a = 0$ จะได้ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = b$ เรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันคงตัว ซึ่งมีกราฟ
เส้นตรงที่ขนานแกน X





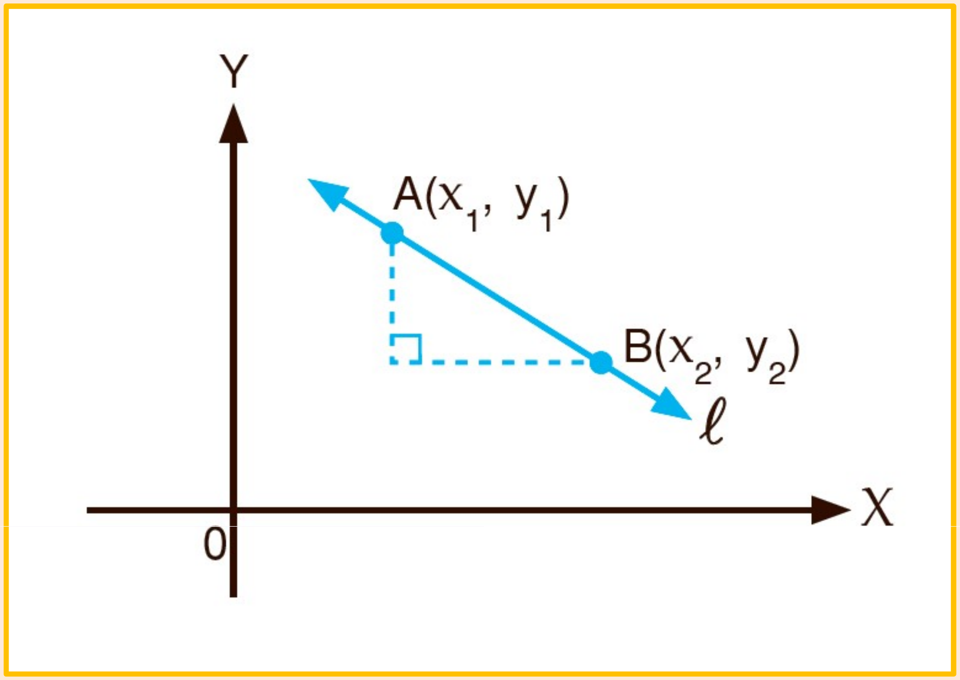
งก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ซึ่งเรียกกราฟของฟังก์ชันกำลังสองว่า พาราโบลา





กรูป จะเห็นว่า ถ้า $a > 0$ กราฟเป็นเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบน

ถ้า $a < 0$ กราฟเป็นเส้นโค้งเปิดลงด้านล่าง



ℓ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(x_1,\ y_1)$ และจุด $B(x_2,\ y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ ความชันของเส้นตรง คือ

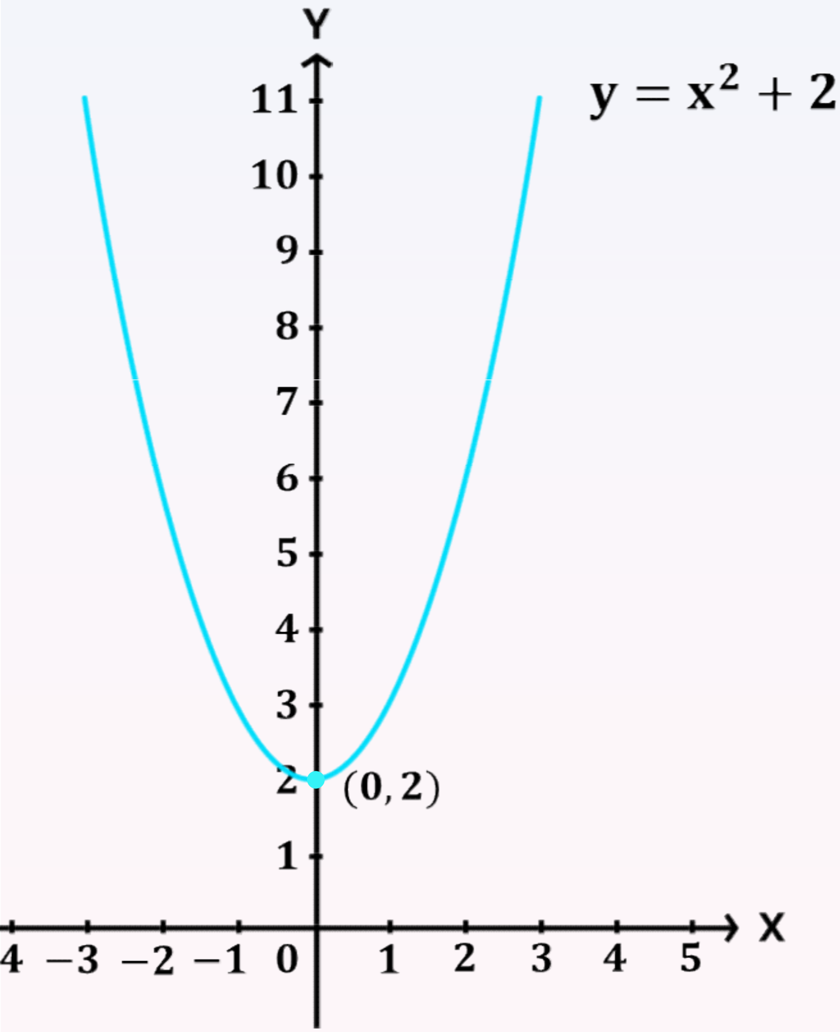
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ต่อไปเราจะได้ศึกษาเรื่องราวเกี่ยวกับลิมิตว่ามีอะไรบ้าง

นักเรียนพร้อมหรือยังคะ ?

ถ้าพร้อมแล้วไปกันเลย **!!!**

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\mathbf{y = x^2 + 2}$



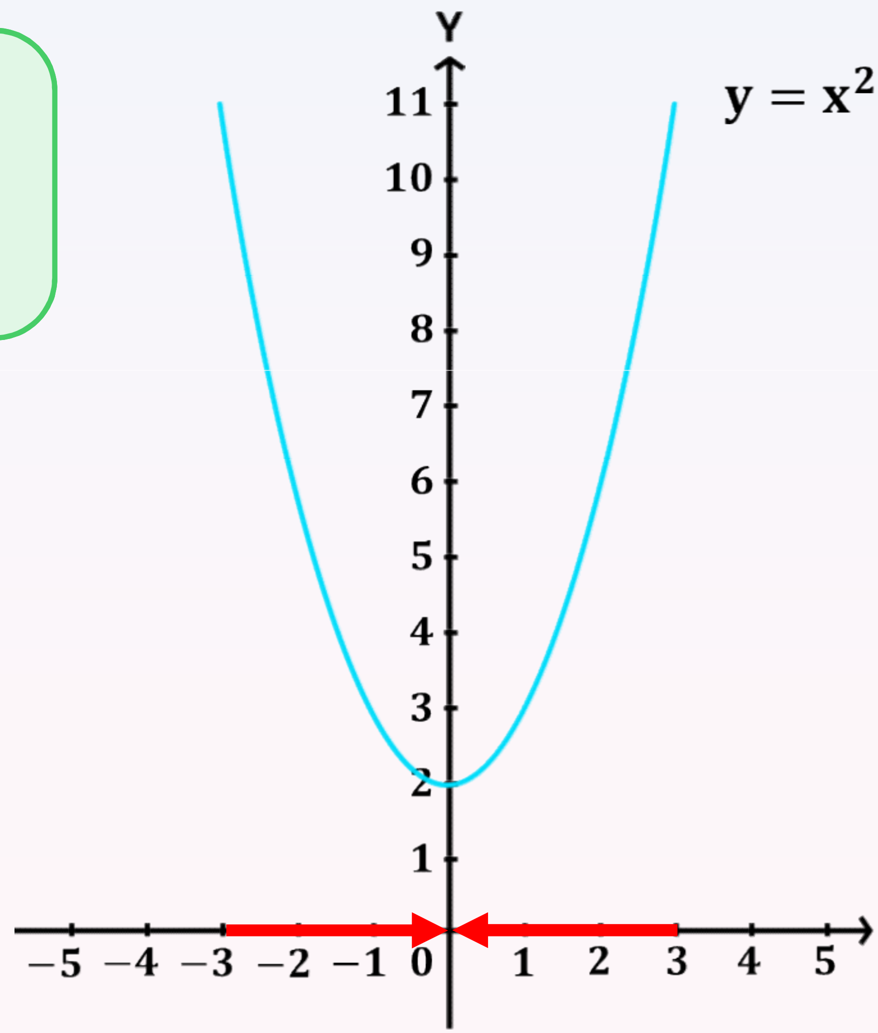
อันดับแรก เราจะศึกษาความสัมพันธ์
ระหว่างกราฟและลิมิต
ของฟังก์ชันกันก่อนนะคะ

นักเรียนจะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชัน $y = x^2 + 2$
เป็นกราฟพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 2)$

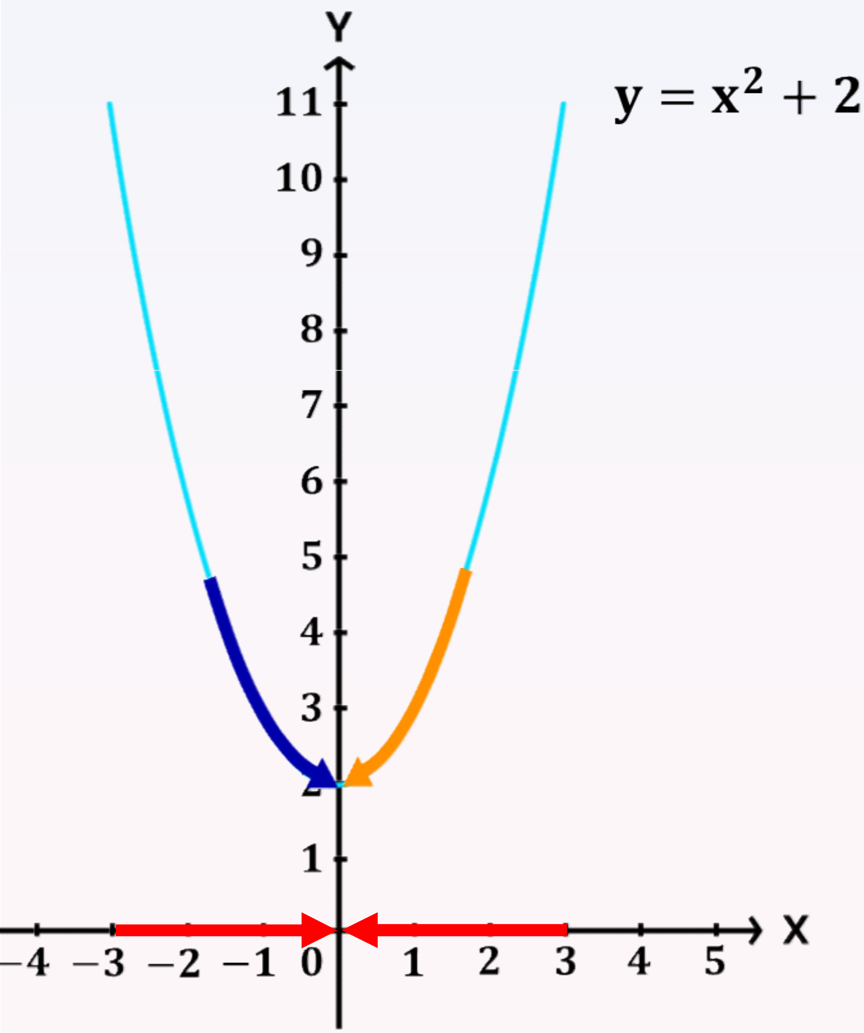
จากกราฟ นักเรียนสังเกตหรือไม่ว่า

ถ้าค่าของ x เข้าใกล้ 0

แล้วค่าของ y หรือค่าของฟังก์ชันจะเข้าใกล้ค่าใด



ก์ชัน



จากกราฟ จะเห็นว่า

เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 0

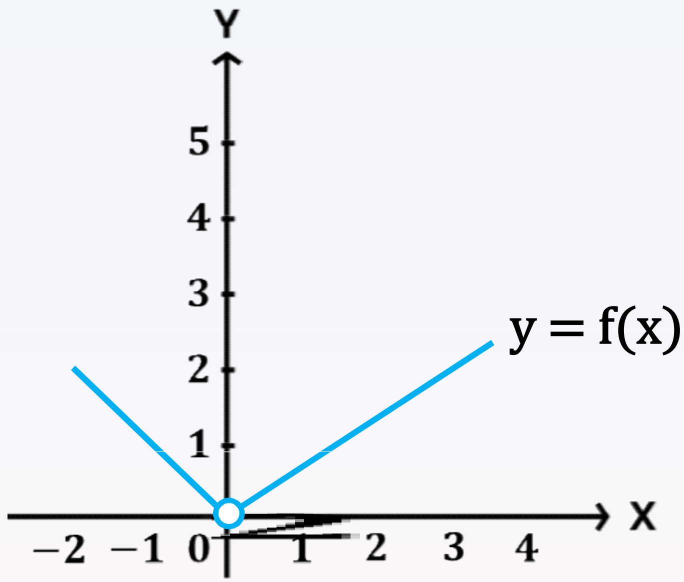
ค่าของ y จะเข้าใกล้ 2

เราเรียกค่านี้ว่า **“ลิมิตของฟังก์ชัน”**

นั่นคือ ลิมิตของฟังก์ชัน $y = x^2 + 2$

เมื่อ x เข้าใกล้ 0

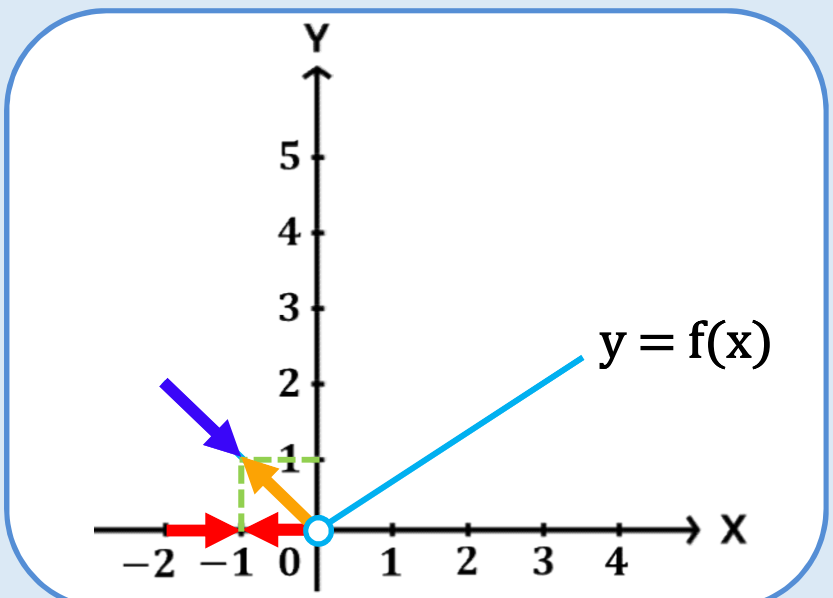
พิจารณากราฟของฟังก์ชัน f ต่อไปนี้



1) ให้หาลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใก

2) ให้หาลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใก

3) ให้หาลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใก



จากกราฟ จะเห็นว่า

เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ -1 ทางด้านซ้าย $(x < -1)$

จะได้ว่า ค่าของ f(x) จะเข้าใกล้ 1

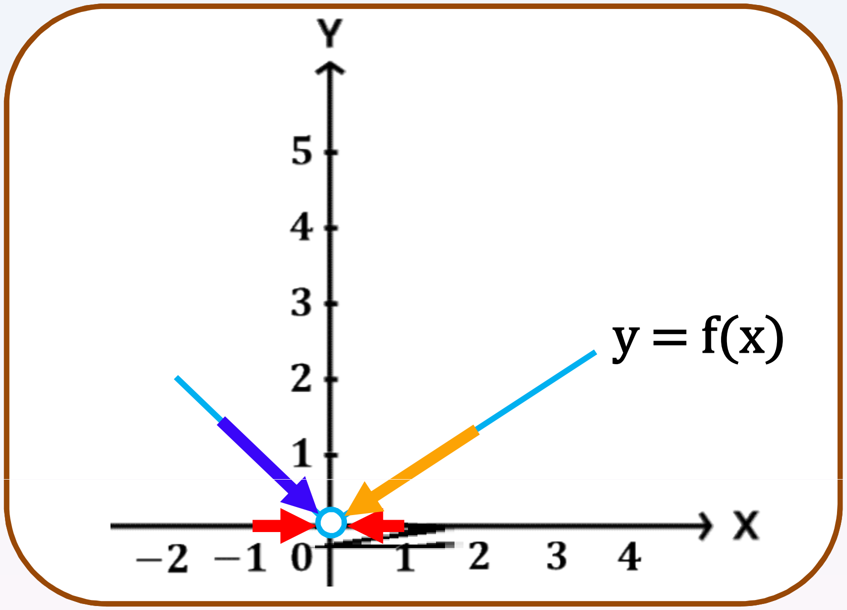
เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ -1 ทางด้านขวา $(x > -1)$

จะได้ว่า ค่าของ f(x) จะเข้าใกล้ 1

ดังนั้น ลิมิตของฟังก์ชัน f เท่ากับ 1 เมื่อ x เข้าใกล้

...ก์ชัน

...ราฟ จะเห็นว่า จุด $(0, 0)$ ไม่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f



เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย $(x < 0)$

จะได้ว่า ค่าของ f(x) จะเข้าใกล้ 0

เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา $(x > 0)$

จะได้ว่า ค่าของ f(x) จะเข้าใกล้ 0

เนื่องจากฟังก์ชัน f ไม่นิยามที่ $x = 0$

แต่ลิมิตของฟังก์ชัน f ยังคงเท่ากับ 0 เมื่อ x เข้าใ...

...ากกราฟ จะเห็นว่า

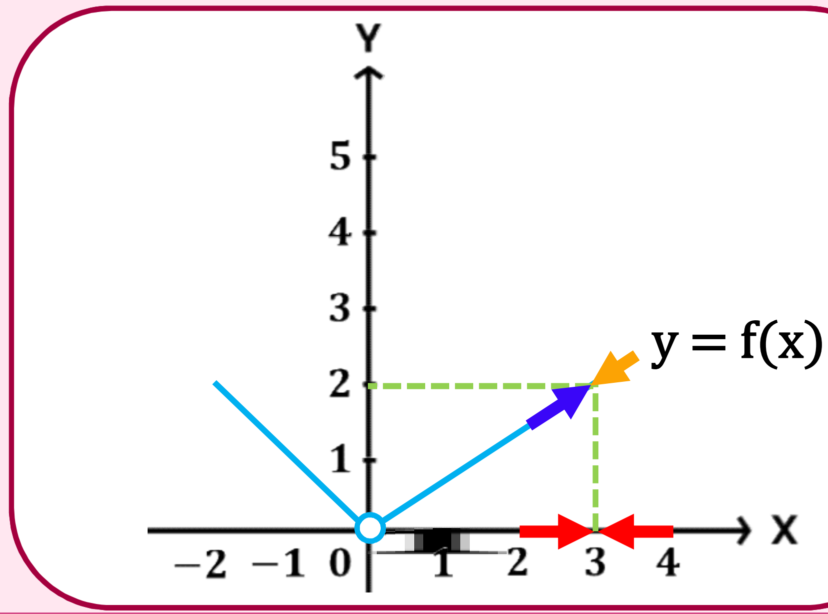
...มื่อค่าของ x เข้าใกล้ 3 ทางด้านซ้าย $(x < 3)$

...ะได้ว่า ค่าของ f(x) จะเข้าใกล้ 2

...มื่อค่าของ x เข้าใกล้ 3 ทางด้านขวา $(x > 3)$

...ะได้ว่า ค่าของ f(x) จะเข้าใกล้ 2

...งนั้น ลิมิตของฟังก์ชัน f เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 3



จากตัวอย่างทั้งสอง
เป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

ำหนด f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริ
หนึ่งจำนวน เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้วกล่าวได้ว่า **ลิมิตของ $f(x)$ ที่ a เท่ากับ L** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$f(x) \to L$ เมื่อ $x \to a$ (อ่านว่า “$f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a”)

จากตัวอย่างที่ผ่านมา นักเรียนสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้
เนื่องจากกราฟของฟังก์ชันไม่ซับซ้อนมากนัก

แต่ถ้าเป็นฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนมากกว่านี้
นักเรียนสามารถใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตมาช่วยหา
ลิมิตของฟังก์ชันได้ ดังนี้

...ก์ชัน

ท 1

f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$\lim\limits_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

$\lim\limits_{x \to a} x = a$

$\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$

$\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c\lim\limits_{x \to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$

...ก์ชัน

ท 1

f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$$

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{เมื่อ } M \neq 0$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n \quad \text{เมื่อ } n \in I^+$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad \text{เมื่อ } n \in I^+ - \{1\}, \sqrt[n]{f(x)} \in R \text{ และ } \sqrt[n]{L} \in R$$

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต
แต่ละข้อมาช่วยในการหาลิมิต
ของฟังก์ชันได้ ดังนี้

ให้หาค่าของ $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1) &= \lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}3x - \lim_{x\to 2}1 && \text{ทฤษฎีบทข้อ 5 และ} \\
&= \lim_{x\to 2}x^2 + 3\lim_{x\to 2}x - \lim_{x\to 2}1 && \text{ทฤษฎีบทข้อ 4} \\
&= 2^2 + 3(2) - 1 && \text{ทฤษฎีบทข้อ 1, 2 แ} \\
&= 4+6-1 \\
&= 9
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1) = 9$

ให้หาค่าของ $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{5-x}\right)(x^3-1)^{50}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{5-x}\right)(x^3-1)^{50}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{5-x}\cdot\lim_{x\to 1}(x^3-1)^{50}$$

ทฤษฎีบทข้อ 7

$$= \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-2x+3}}{\lim_{x\to 1}(5-x)}\cdot\left[\lim_{x\to 1}(x^3-1)\right]^{50}$$

ทฤษฎีบทข้อ 8 และ 9

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1}x^2-2\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}3}}{\lim_{x\to 1}5-\lim_{x\to 1}x}\cdot\left(\lim_{x\to 1}x^3-\lim_{x\to 1}1\right)^{50}$$

ทฤษฎีบทข้อ 3, 4, 5 และ 6

$$= \frac{\sqrt{1^2-2(1)+3}}{5-1}\cdot(1^3-1)^{50}$$

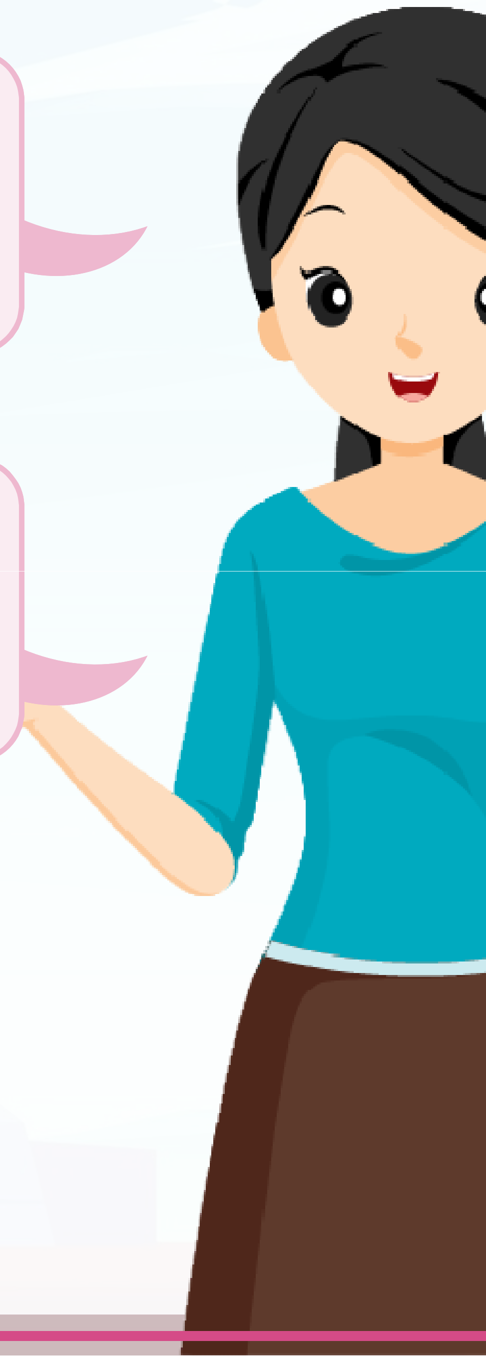
ทฤษฎีบทข้อ 1, 2 และ 3

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)(0) = 0$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{5-x}\right)(x^3-1)^{50} = 0$

จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้างต้น
ทำให้นักคณิตศาสตร์สร้างทฤษฎีบทเกี่ยวกับ
การหาลิมิตของฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรรกยะ

นักเรียนทราบหรือไม่ว่า นักคณิตศาสตร์นำทฤษฎีบท
เกี่ยวกับลิมิตข้อใด มาสร้างทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาลิมิต
ของฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรรกยะ



จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 1, 3, 4, 5 และ 6 ทำให้นักคณิตศาสตร์สร้างทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาลิมิตของฟังก์ชันพหุนามได้ ดังนี้

ท 2

$) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

ป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 8 และทฤษฎีบท 2
จะหาลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะได้ ดังนี้

เพื่อให้นักเรียนเข้าใจการนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาลิมิต
ของฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรรกยะไปใช้
ให้ศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3

ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์

และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $q(a) \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$$

ให้หาค่าของ $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+3}{x-1}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{(-1)^2+3}{-1-1}$$

$$= \frac{4}{-2}$$

$$= -2$$

ดังนั้น $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+3}{x-1} = -2$

จากฟังก์ชันตรรกยะ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อแทน x ด้วย a แล้วทำให้ $p(a) = 0$ และ $q(a) = 0$ จะได้ว่า $f(a)$ หาค่าไม่ได้

นักเรียนคิดว่า ถ้า $f(a)$ หาค่าไม่ได้ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้หรือไม่ ?

จากคำถามก่อนหน้านี้
เราไปหาคำตอบพร้อม ๆ กันเลยค่ะ

ให้หาค่าของ $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

หนด $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $p(x) = x^2 - 9$ และ $q(x) = x - 3$

อแทน x ด้วย 3 จะได้ $p(3) = 3^2 - 9 = 0$ และ $q(3) = 3 - 3 = 0$ ทำให้ $f(3)$ หาค่าไม่ได้

เกตว่า เมื่อนำ $f(x)$ มาจัดรูปใหม่ จะได้ว่า $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ เมื่อ $x - 3 \neq$

นั้น
$$\lim_{x \to 3} (x+3) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$
$$= 3 + 3$$
$$= 6$$

นคือ
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

ให้หาค่าของ $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{2+x}}{2+x}$

นด $f(x) = \frac{\sqrt{5+x}}{5+x}, p(x) = \sqrt{5+x}$ และ $q(x) = 5+x$

-2 x $0 = \sqrt{2+(-2)} = q(-2)$ และ $0 = 2+(-2) = p(-2)$ ทำให้ $f(-$

ตว่า เมื่อนำ $f(x)$ มาจัดรูปใหม่ จะได้ว่า $\frac{\sqrt{5+x}}{5+x} = \frac{\sqrt{5+x}}{(\sqrt{5+x})^2} = \frac{1}{\sqrt{5+x}}$ เมื่อ $\sqrt{5+x} \neq 0$

นั้น $\lim_{x \to -2} \frac{1}{\sqrt{2+x}} = \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{2+x}}{2+x}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้

คือ $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{2+x}}{2+x}$ หาค่าไม่ได้

จากตัวอย่างที่ 6 และ 7 จะเห็นว่า ถ้า $f(a)$ หาค่าไม่ได้ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x)$ อาจจะหาค่าได้หรือหาค่าไม่ได้ เราต้องนำฟังก์ชันตรรกยะมาจัดรูปเพื่อพิจารณาลิมิต

ก์ชัน

นักเรียนทราบหรือไม่ว่า
ฟังก์ชันที่เราได้ศึกษามาแล้วมีเซตของโดเมนเป็นอย่างไร

ถ้านักเรียนยังไม่ทราบ ให้ลองพิจารณาจากฟังก์ชันต่อไปนี้

$$(\mathrm{x}) = 4\mathrm{x} - 3$$

$$(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 1$$

$$(\mathrm{x}) = \begin{cases} 2 - 3\mathrm{x} & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \mathrm{x}^3 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

นักเรียนคิดว่า ฟังก์ชันทั้งสาม
มีเซตของโดเมนเหมือนหรือ
แตกต่างกันอย่างไร ?

ก์ชัน

$f(x) = 4x - 3$ และ $g(x) = x^2 + 2x + 1$ จะเห็นว่า มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงเพียงเซตเดียว

ก $h(x) = \begin{cases} 2 - 3x & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x^3 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$ จะเห็นว่า โดเมนถูกแบ่งออกเป็นสองช่วง คือ $x < 1$ และ $x \geq$

ยกฟังก์ชัน h ว่า **ฟังก์ชันแบ่งส่วน (piecewise function)**

กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ 5 - 2x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

2) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

วิธีทำ

1) เนื่องจาก $f(x) = x^2 - 4$ เมื่อ $x < 2$

จะได้ $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 4)$$

$$= 2^2 - 4$$

$$= 0$$

กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ 5 - 2x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

1) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

2) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

3) $\lim_{x \to 2} f(x)$

วิธีทำ

2) เนื่องจาก $f(x) = 5 - 2x$ เมื่อ $x > 2$

จะได้ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5 - 2x)$

$= 5 - 2(2)$

$= 1$

ก์ชัน

กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ 5 - 2x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

1) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

2) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

3) $\lim_{x \to 2} f(x)$

วิธีทำ 3) เนื่องจาก $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$

จะได้ $\lim_{x \to 2} f($ หาค่าไม่ได้

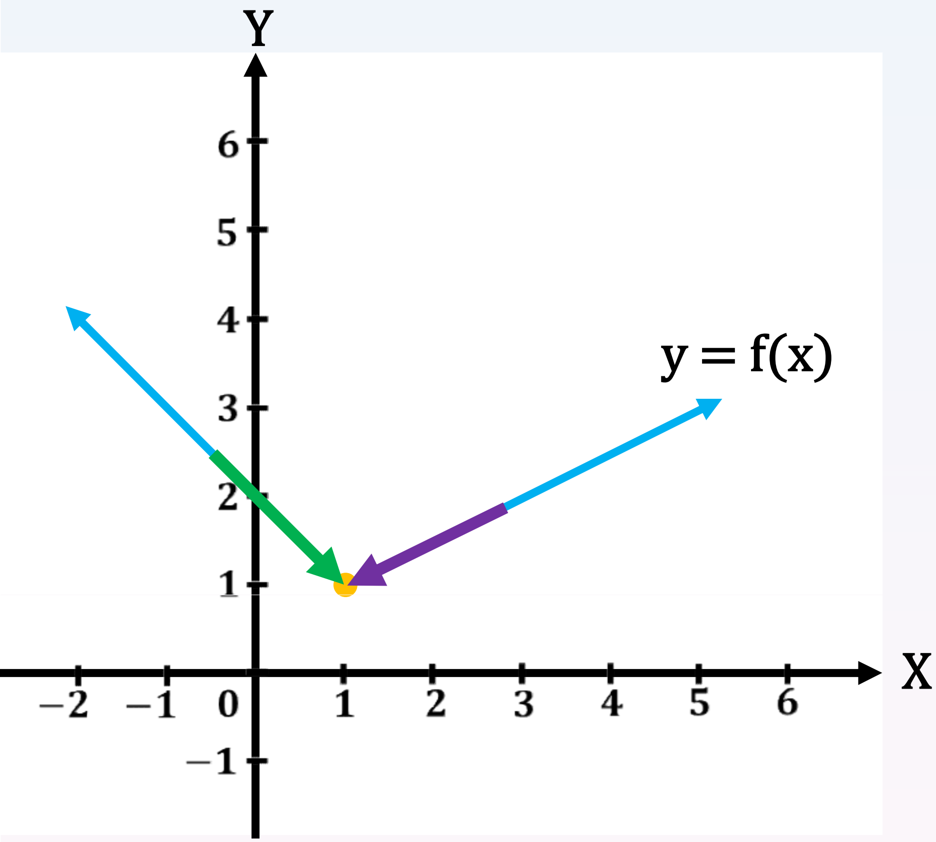
องของฟังก์ชัน

ในหัวข้อต่อไป นักเรียนจะได้ศึกษาเกี่ยวกับ
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ดังนี้

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันแบ่งได้ 2 กรณี คือ
ความต่อเนื่องที่จุดและความต่อเนื่องบนช่วง

จากที่เราเคยศึกษาฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่งมาแล้ว
ในหัวข้อนี้ เราจะเริ่มต้นศึกษาความต่อเนื่องที่จุดกันก่อน
ถ้าพร้อมแล้วไปกันเลยค่ะ

องของฟังก์ชัน



จากกราฟ $y = f(x)$ ที่ $x = 1$ จะเห็นว่า

1. $f(1) = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

   ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

จากข้อ 1. – 3. เราเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่

ดังบทนิยามต่อไปนี้

หนด f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ ก็ต่อเ

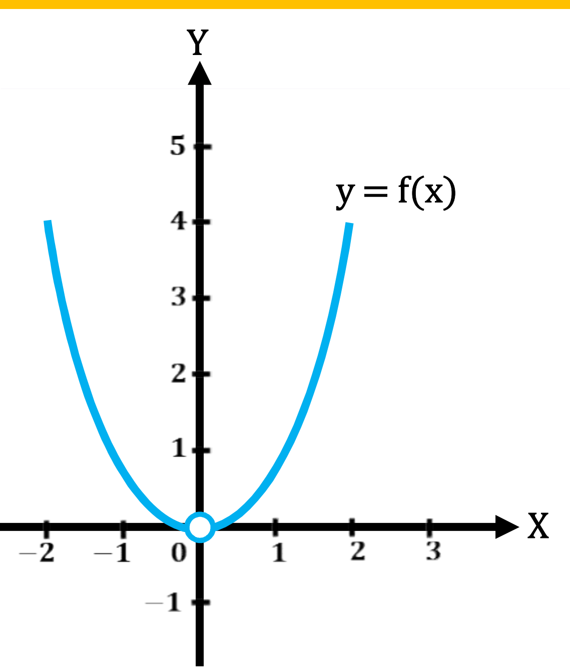
1. $f(c)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

องของฟังก์ชัน

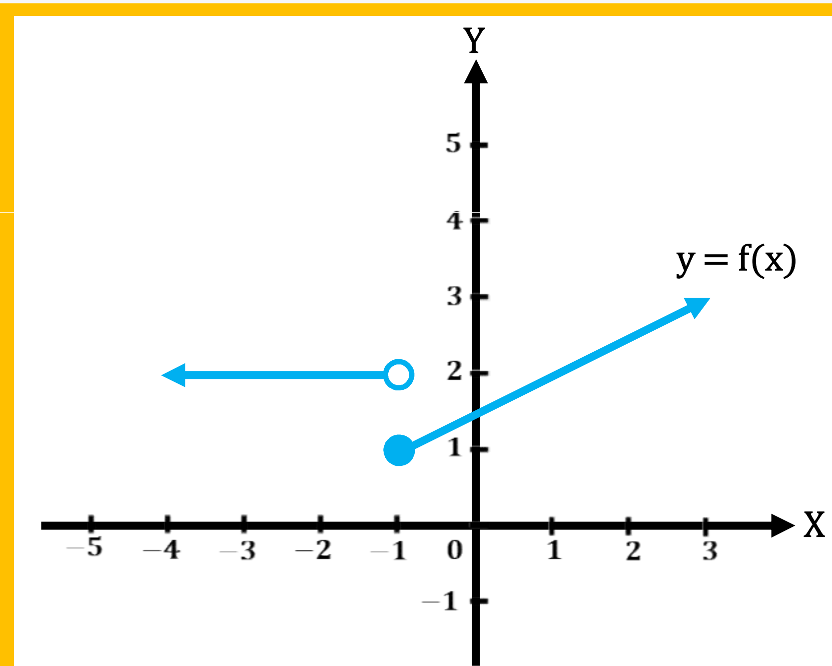
ะเห็นว่า กราฟมีช่องว่างที่ $x = 0$

$f(0)$ หาค่าไม่ได้

นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$



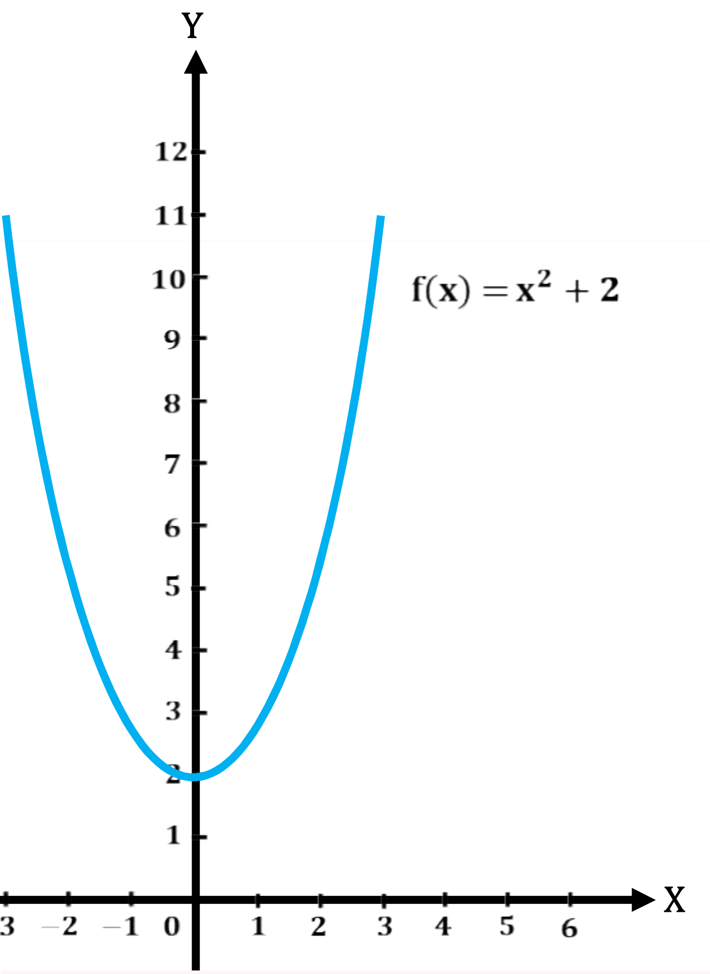
ดังนั้น ถ้าฟังก์ชัน f ไม่สอดคล้องกับบทนิยามข้อใดข้อหนึ่ง แล้ว f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = c$ เช่น



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชัน f มีช่องว่างที่จุด (−

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$

ต่อไปเราจะศึกษาความต่อเนื่อง
บนช่วงของฟังก์ชันกันนะคะ



จากกราฟ $f(x) = x^2 + 2$ บนช่วง $[-3, 3]$ จะเห็นว่า

1. เนื่องจากโดเมนของ $f(x) = x^2 + 2$ อยู่บนช่วง $[-3$
   และ $(-3, 3) \subset [-3, 3]$
   จะได้ว่า ทุก ๆ จุดของ x บนช่วง $[-3, 3]$
   ทำให้ $f(x) = x^2 + 2$ หาค่าได้
2. เนื่องจาก $f(-3) = (-3)^2 + 2 = 11$
   และ $\lim_{x \to -3^+} f(x) = (-3)^2 + 2 = 11$
   จะได้ว่า $f(-3) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = 11$
3. เนื่องจาก $f(3) = 3^2 + 2 = 11$
   และ $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3^2 + 2 = 11$
   จะได้ว่า $f(3) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 11$

จากข้อ 1. – 3. เราเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-3,$
ดังบทนิยามต่อไปนี้

องของฟังก์ชัน

1. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)

2. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b)$ ก็ต่อเมื่อ
   1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)
   2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

3. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ ก็ต่อเมื่อ
   1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)
   2) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

4. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ
   1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)
   2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
   3) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

เพื่อให้นักเรียนเข้าใจบทนิยามของ
ความต่อเนื่องบนช่วงมากขึ้น
เราไปศึกษาตัวอย่างพร้อม ๆ กันค่ะ

ให้แสดงว่า $\mathbf{f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[\mathbf{-4, 4}]$

งจากต้องการแสดงว่า $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-4, 4]$

้องใช้บทนิยามของความต่อเนื่องบนช่วงข้อ 4.

1) เนื่องจาก $D_f = [-4, 4]$ เราจึงสามารถหาค่าของฟังก์ชัน f ได้ทุกค่าเมื่อ $x \in [-4, 4]$

และ $(-4, 4) \subset [-4, 4]$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-4, 4)$

2) ต้องแสดงว่า $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = f(-4)$

เนื่องจาก $f(-4) = -4 - \sqrt{16 - (-4)^2} = -4$

และ $\lim\limits_{x \to -4^+} \left(x - \sqrt{16 - x^2}\right) = \lim\limits_{x \to -4^+} x - \sqrt{\lim\limits_{x \to -4^+} 16 - \lim\limits_{x \to -4^+} x^2} = -4$

จะได้ $\lim\limits_{x \to -4^+} \left(x - \sqrt{16 - x^2}\right) = f(-4)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาของ $x = -4$

องของฟังก์ชัน

ให้แสดงว่า $\mathbf{f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[\mathbf{-4, 4}]$

งจากต้องการแสดงว่า $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-4, 4]$

้องใช้บทนิยามของความต่อเนื่องบนช่วงข้อ 4.

3) ต้องแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$

เนื่องจาก $f(4) = 4 - \sqrt{16 - 4^2} = 4$

และ $\lim\limits_{x \to 4^-} \left(x - \sqrt{16 - x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 4^-} x - \sqrt{\lim\limits_{x \to 4^-} 16 - \lim\limits_{x \to 4^-} x^2} = 4$

จะได้ $\lim\limits_{x \to 4^-} \left(x - \sqrt{16 - x^2}\right) = f(4)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายของ $x = 4$

าข้อ 1), 2) และ 3) สรุปได้ว่า $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-4, 4]$

งเส้นโค้ง

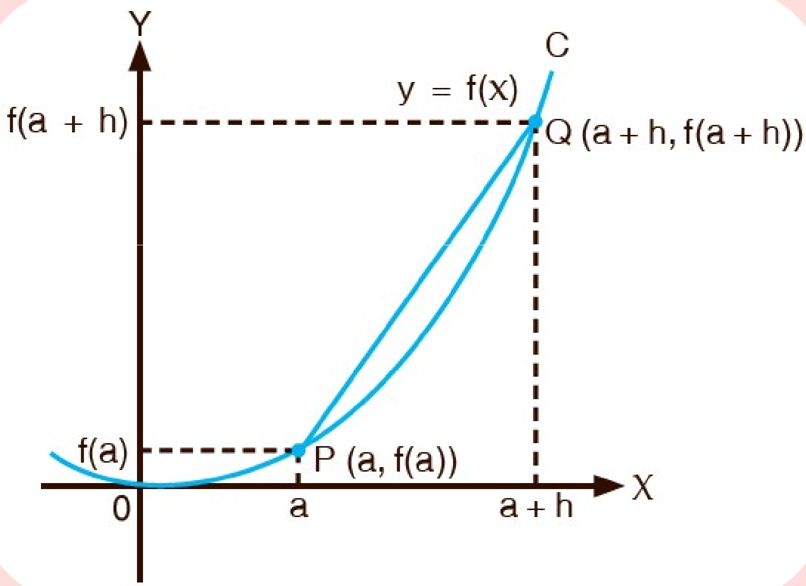
จากที่นักเรียนเคยศึกษาเรื่องความสัมพันธ์ระหว่าง
เส้นสัมผัสของวงกลมกับรัศมีของวงกลมมาแล้ว

ถ้านักเรียนต้องการหาเส้นสัมผัสของวงกลม
ซึ่งมีเพียง 1 เส้น ณ จุดสัมผัสใด ๆ

นักเรียนคิดว่า จะนำความรู้เกี่ยวกับลิมิต
มาช่วยในการหาความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด ๆ นั้นอย่างไร ?

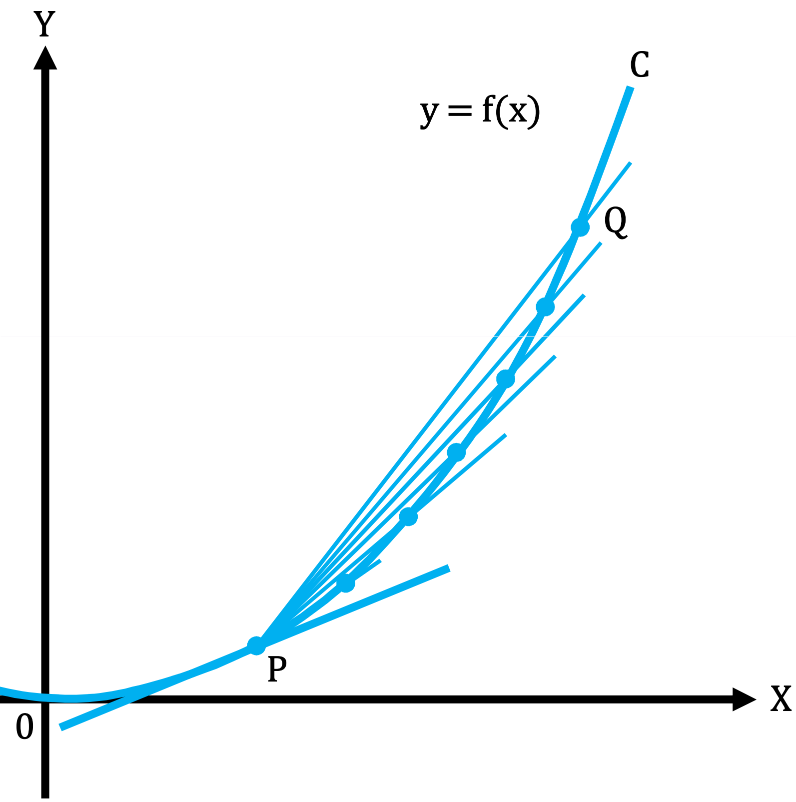
องเส้นโค้ง

กำหนด C เป็นเส้นโค้ง ซึ่งกำหนดโดยสมการ $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ และจุด $Q(a + h, f(a + h))$
โดยที่ $h \neq 0$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง ดังรูป



องเส้นตรง PQ ตัดเส้นโค้ง C จะได้ว่า ความชันของส่วนของเส้นตรง PQ คือ $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \dfrac{f(a +}{}$

Q เข้าใกล้จุด P มากยิ่งขึ้น จนจุด Q เกือบทับจุด P ดังรูป



ถ้าลิมิตของ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ เมื่อ h เข้าใกล้ 0

แล้วเรียก $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ว่า

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด P คือ
ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

งเส้นโค้ง

เพื่อให้นักเรียนเข้าใจการนำความรู้เกี่ยวกับลิมิตมาช่วยในการหาความชันของเส้นโค้ง ณ จุดใดจุดหนึ่งมากยิ่งขึ้น เราไปศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้กันนะคะ

ให้หาความชันของเส้นโค้ง $\mathbf{y = x^2}$ ที่จุด $\mathbf{(2, 4)}$ และหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $\mathbf{(2,}$

$f(x) = x^2$ [illegible]

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$$

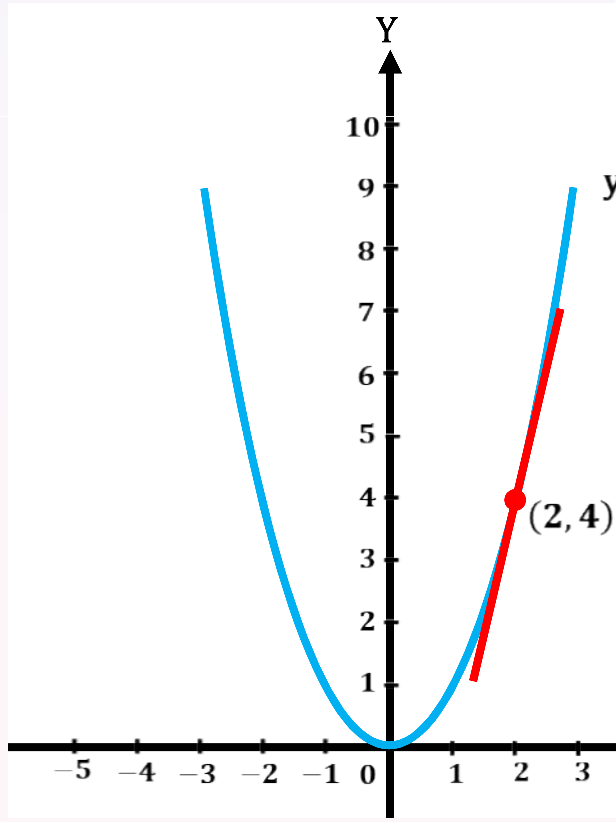
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(4+h)$$

$$= 4$$

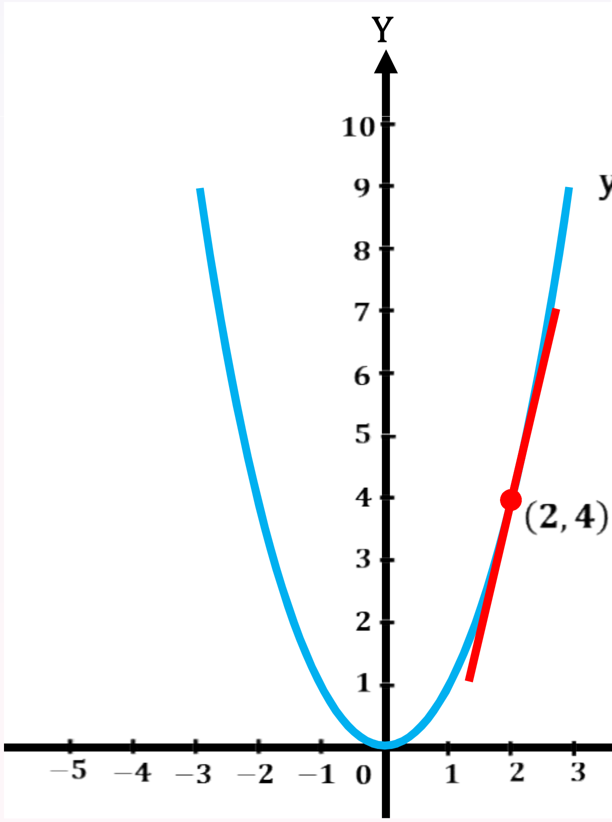


งเส้นโค้ง

ให้หาความชันของเส้นโค้ง $\mathbf{y = x^2}$ ที่จุด $(\mathbf{2, 4})$ และหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(\mathbf{2, 4}$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (2, 4) คือ

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 4 &= 4(x - 2) \\
y - 4 &= 4x - 8 \\
y &= 4x - 4
\end{aligned}
$$



งฟังก์ชัน

นอกจากการนำความรู้เกี่ยวกับลิมิตมาช่วยหาความชันของเส้นโค้งแล้ว เรายังนำไปหาอัตราการเปลี่ยนแปลงได้อีกด้วย

y $=$ f(x) เป็นฟังก์ชัน และ a อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f จะได้ว่า

รเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น a + h คือ $\frac{f(a+h) -}{h}$

รเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ x $=$ a คือ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

เราเรียก $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) ว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x**

ซึ่งเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{d}{dx}f(x)$ หรือ y'

...ฟังก์ชัน

ต่อไป เราลองไปดูตัวอย่างการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันกันนะคะ

กำหนด $\mathbf{f(x) = x^2 - 1}$ ให้หา $\mathbf{f'(x)}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2 - 1] - (x^2 - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 1) - (x^2 - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x + h) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมา เป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใดๆ

ต่อไปเราจะมาดูตัวอย่างการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ขณะที่ $x = a$

2 กำหนด $\mathbf{f(x) = \sqrt{x-3}}$ ให้หา $\mathbf{f'(4)}$

$$f'(4) = \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(4+h)-3} - \sqrt{4-3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}$$

3 การสูบลมเข้าลูกโป่งทรงกลม เราคำนวณปริมาตรของลูกโป่งทรงกลม $(\mathbf{S})$ ได้จากสูตร $\mathbf{S(r)} = \frac{4}{3}\boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^3$ โดยที่ $\mathbf{r}$ เป็นความยาวรัศมีของลูกโป่งทรงกลมมีหน่วยเป็นเซนติเมตร และกำหนด $\boldsymbol{\pi} \approx \mathbf{3.14}$ อยากทราบว่า

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งทรงกลมเทียบกับความยาวรัศมีเท่ากับเท่าไร เมื่อรัศมียาว 30 เซนติเม

ปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งทรงกลมเทียบกับความยาวรัศมี เมื่อรัศมียาว 30 เซนติเมตร

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(30+h)-S(30)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4}{3}\pi(30+h)^3-\frac{4}{3}\pi(30)^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4}{3}\pi(27{,}000+2{,}700h+90h^2+h^3)-\frac{4}{3}\pi(27{,}000)}{h}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\lim_{h\to 0}\frac{2{,}700h+90h^2+h^3}{h}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\lim_{h\to 0}(2{,}700+90h+h^2)$$

3 การสูบลมเข้าลูกโป่งทรงกลม เราคำนวณปริมาตรของลูกโป่งทรงกลม $(\mathbf{S})$ ได้จากสูตร $\mathbf{S(r) = \frac{4}{3}\pi r^3}$ โดยที่ $\mathbf{r}$ เป็นความยาวรัศมีของลูกโป่งทรงกลมมีหน่วยเป็นเซนติเมตร และกำหนด $\boldsymbol{\pi} \approx \mathbf{3.14}$ อยากทราบว่า **อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งทรงกลมเทียบกับความยาวรัศมีเท่ากับเท่าไร เมื่อรัศมียาว 30 เซนติเ**

ปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งทรงกลมเทียบกับความยาวรัศมี เมื่อรัศมียาว 30 เซนติเมตร

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(30+h)\ -S(30)}{h} = \frac{4}{3}\pi(2,700)$$

$$\approx \frac{4}{3}(3.14)(2,700$$

$$= 11,304$$

ตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งทรงกลมเทียบกับความยาวรัศมี เมื่อรัศมียาว 30 เซนติเมตร

ระมาณ 11,304 ลูกบาศก์เซนติเมตร/เซนติเมตร

จากการหาอนุพันธ์โดยการใช้ลิมิตเข้ามาช่วย
อาจจะไม่สะดวกสำหรับฟังก์ชันที่ซับซ้อน

นักคณิตศาสตร์จึงสร้างสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันขึ้นมา
เพื่อทำให้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ซับซ้อนง่ายยิ่งขึ้น

เราลองมาดูสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
แต่ละสูตรไปพร้อม ๆ กันนะคะ

ฟังก์ชัน

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x) = 0$

เช่น กำหนด $f(x) = 4$ จะได้ $f'(x) = 0$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $f'(x) = 1$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

เช่น กำหนด $f(x) = x^5$

จะได้ $f'(x) = 5x^{5-1}$

$= 5x^4$

กำหนด $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $f'(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}-1}}{2}$

$= \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

งฟังก์ชัน

นด $f(x) = 7x^3$

ได้ $f'(x) = 7\dfrac{d}{dx}(x^3)$

$= 7(3x^2)$

$= 21x^2$

สูตรที่ 4 ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ x และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

แล้ว cf มีอนุพันธ์ที่ x และ $(cf)'(x) = cf'(x)$

สูตรที่ 5 ถ้าฟังก์ชัน f และ g มีอนุพันธ์ที่ x แล้วฟังก์ชัน $f + g$ มีอนุพันธ์ที่ x และ $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

สูตรที่ 6 ถ้าฟังก์ชัน f และ g มีอนุพันธ์ที่ x แล้วฟังก์ชัน $f - g$ มีอนุพันธ์ที่ x และ $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

เช่น กำหนด $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

จะได้ $f'(x) = 4\dfrac{d}{dx}(x^2) - 2\dfrac{d}{dx}(x) + \dfrac{d}{dx}(1)$

$= 8x - 2$

สูตรที่ 7 ถ้าฟังก์ชัน f และ g มีอนุพันธ์ที่ x แล้วฟังก์ชัน fg มีอนุพันธ์ที่ x และ $(fg)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

เช่น กำหนด $f(x) = x(x^2 + 6)$

จะได้ $$\begin{aligned} f'(x) &= x\frac{d}{dx}(x^2 + 6) + (x^2 + 6)\frac{d}{dx}(x) \\ &= x(2x) + (x^2 + 6)(1) \\ &= 2x^2 + x^2 + 6 \\ &= 3x^2 + 6 \end{aligned}$$

ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(x) \neq 0$ แล้ว $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x

และ $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

เช่น กำหนด $$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 5}{x}$$

จะได้ $$f'(x) = \frac{x\frac{d}{dx}(x^3 - 2x + 5) - (x^3 - 2x + 5)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x(3x^2 - 2) - (x^3 - 2x + 5)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{3x^3 - 2x - x^3 + 2x - 5}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 5}{x^2}$$

$$= 2x - \frac{5}{x^2}$$

จากที่เราได้ศึกษาสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
นักเรียนคิดว่า เราสามารถนำเรื่องอนุพันธ์
มาช่วยหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้หรือไม่ ?

จากสูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$

ณ จุด $P(a, f(a))$ คือ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

นักเรียนสังเกตหรือไม่ว่าเป็นสูตรเดียวกันกับ
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ขณะที่ $x = a$

แสดงว่า เราสามารถนำสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
มาช่วยในการหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้เช่นกัน

4 กำหนดเส้นโค้ง $\mathbf{y = \sqrt{x}(x^2 - 5)}$ ให้หาจุดบนเส้นโค้งที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นขนานกั

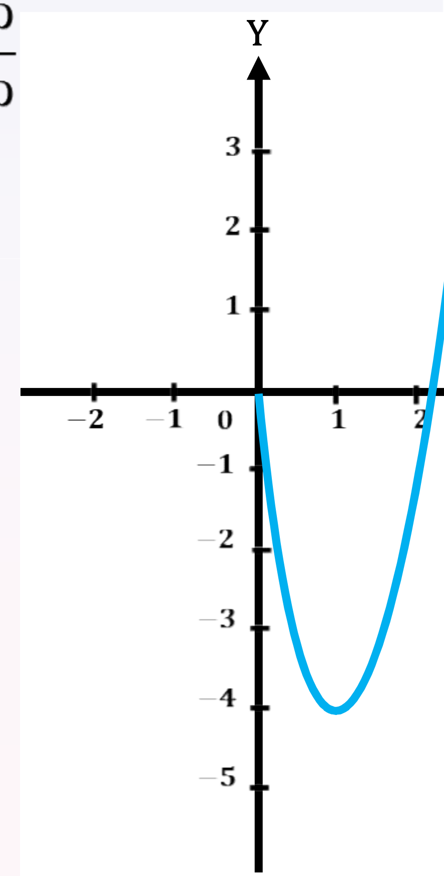
กำหนดจุด (x, y) เป็นจุดบนเส้นโค้งที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้งขนานกับแกน X

จะได้ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\sqrt{x}(x^2 - 5)]$

$$= \frac{5x\sqrt{x}}{2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งต้องขนานกับแกน X

จะได้ว่า เส้นสัมผัสเส้นโค้งจะมีความชันเท่ากับ 0



4 กำหนดเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}(x^2 - 5)$ ให้หาจุดบนเส้นโค้งที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นขนานกั

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{5x\sqrt{x}}{2} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{5x^2 - 5}{2\sqrt{x}} = 0$$

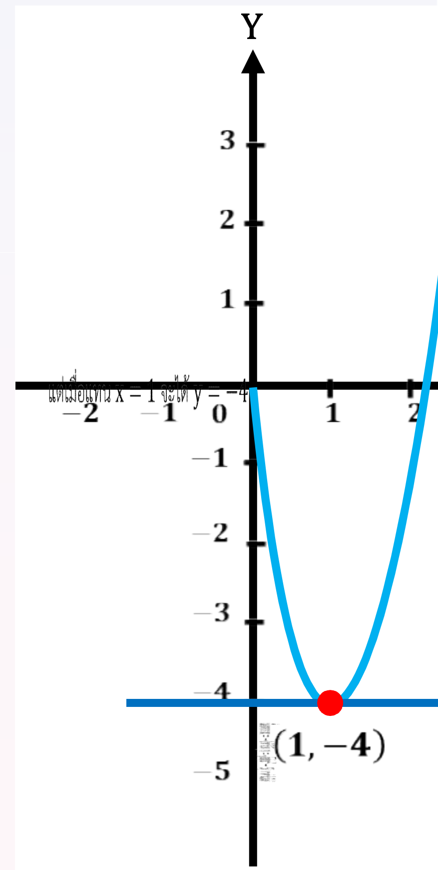
$$\frac{5(x^2 - 1)}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$x = -1, 1$$

เมื่อแทน $x = -1$ จะได้ว่า $y = \sqrt{x}(x^2 - 5)$ หาค่าไม่ได้

แต่เมื่อแทน $x = 1$ จะได้ $y = -4$

ดังนั้น จุด $(1, -4)$ เป็นจุดบนเส้นโค้งที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นขนานกับแกน X



ฟังก์ชันประกอบ

จากที่ได้ศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเพียงหนึ่งฟังก์ชันเท่านั้น

ต่อไปเราจะศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
สองฟังก์ชัน ซึ่งเป็นฟังก์ชันประกอบกันบ้าง

โดยเราจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
โดยใช้กฎที่สำคัญ เรียกว่า **กฎลูกโซ่**

...ฟังก์ชันประกอบ

...5 กำหนด $\mathbf{y(u) = 2u^2 + 1}$ และ $\mathbf{u(x) = x^2}$ ให้หา $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(2u^2 + 1) = 4u \text{ และ } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (4u)(2x)$$

$$= [4(x^2)](2x)$$

$$= 8x^3$$

จากฟังก์ชันที่กำหนด จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $\mathbf{y}$ อยู่ในรูปตัวแปร $\mathbf{u}$
และฟังก์ชัน $\mathbf{u}$ อยู่ในรูปตัวแปร $\mathbf{x}$

จะได้ว่า $\mathbf{y}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เทียบกับ $\mathbf{u}$
และ $\mathbf{u}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เทียบกับ $\mathbf{x}$ ดังนี้

สิ่งที่โจทย์ต้องการ คือ $\frac{dy}{dx}$ เราจึงใช้กฎลูกโซ่ในการหาคำตอบ ดังนี้

ฟังก์ชันประกอบ

จากขั้นตอนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบข้างต้น
สอดคล้องกับสูตรที่ 9 ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน คือ

สูตรที่ 9 ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ x และ g มีอนุพันธ์ที่ $f(x)$
แล้วฟังก์ชัน $g \circ f$ มีอนุพันธ์ที่ x
และ $(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$

นอกจากนี้ เรายังมีฟังก์ชันบางฟังก์ชัน
ที่สามารถนำกฎลูกโซ่เข้ามาช่วยในการหาคำตอบได้
ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนด $\mathbf{F(x) = (x^3 - 5x + 2)^{14}}$ ให้หา $\mathbf{F'(x)}$

จาก $F(x) = (x^3 - 5x + 2)^{14}$ เห็นว่า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันประกอบ ดังนี้

กำหนด $f(x) = x^3 - 5x + 2$ และ $g(x) = x^{14}$

ได้ $F(x) = (g \circ f)(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 5$ และ $g'(x) = 14x^{13}$

ยกฎลูกโซ่ จะได้

$$F'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

$$= 14(x^3 - 5x + 2)^{13}(3x^2 - 5)$$

นั้น $F'(x) = 14(3x^2 - 5)(x^3 - 5x + 2)^{13}$

จากการศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
โดยอนุพันธ์เหล่านั้นเป็นการหาอนุพันธ์อันดับที่ 1
แต่นักเรียนทราบหรือไม่ว่า เราสามารถหาอนุพันธ์อันดับที่ 2
อันดับที่ 3 หรืออันดับอื่น ๆ ได้

ซึ่งการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันสามารถหาได้เรื่อย ๆ
เมื่ออนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก ๆ จุด
เราเรียกอนุพันธ์เหล่านี้ว่า **อนุพันธ์อันดับสูง**

เช่น ให้หาอนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 1$

จาก $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 1$

จะได้ $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 4$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 2$$

$$f'''(x) = 24x - 18$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

นักเรียนจำได้ไหมว่า เรื่อง การเคลื่อนที่ของวัตถุ
เกี่ยวข้องกับระยะทาง ความเร็ว และความเร่ง
ที่มีความสัมพันธ์จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ซึ่งความเร็วได้จากการหาอนุพันธ์ของระยะทาง
และความเร่งได้จากการหาอนุพันธ์ของความเร็ว
สามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

ถ้าระยะทาง (s) เป็นฟังก์ชันที่สัมพันธ์กับเวลา (t) แล้ว

อนุพันธ์อันดับที่ 1 คือ $\frac{ds}{dt}$ หรือ $s'(t)$ แทนความเร็ว (v)

อนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ $\frac{d^2s}{dt^2}$ หรือ $s''(t)$ แทนความเร่ง (a)

หรืออาจใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของความเร็วแทนความเร่ง (a) คือ $\frac{dv}{dt}$

มุขปล่อยวัตถุจากที่สูงลงสู่พื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s(t) = 5t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที ให้หา

1) ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 2 วินาที
2) ความเร็วในการเคลื่อนที่ของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
3) ความเร่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
4) ความเร่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุขณะเวลา $t = 4$ วินาที

วิธีทำ

1) จาก $s(t) = 5t^2$

จะได้ $s(2) = 5(2)^2 = 20$ เมตร

ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 2 วินาที เท่ากับ 20 เมตร

2) จาก $v = \frac{ds}{dt}$

จะได้ $v = \frac{d}{dt}(5t^2) = 10t$ เมตร/วินาที

ดังนั้น ความเร็วในการเคลื่อนที่ของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ $10t$ เมตร/วินาที

3) จาก $a = \frac{dv}{dt}$

จะได้ $a = \frac{d}{dt}(10t) = 10$ เมตร/วินาที^{2}

ดังนั้น ความเร่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ 10 เมตร/วินาที^{2}

4) ความเร่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุขณะเวลา $t = 4$ วินาที เท่ากับ 10 เมตร/วินาที^{2}

ต์ของอนุพันธ์

นอกจากการนำอนุพันธ์ไปประยุกต์กับการเคลื่อนที่ของวัตถุ
แล้วยังสามารถนำมาประยุกต์กับฟังก์ชันเพื่อพิจารณา
องค์ประกอบต่าง ๆ ของฟังก์ชันได้อีกด้วย

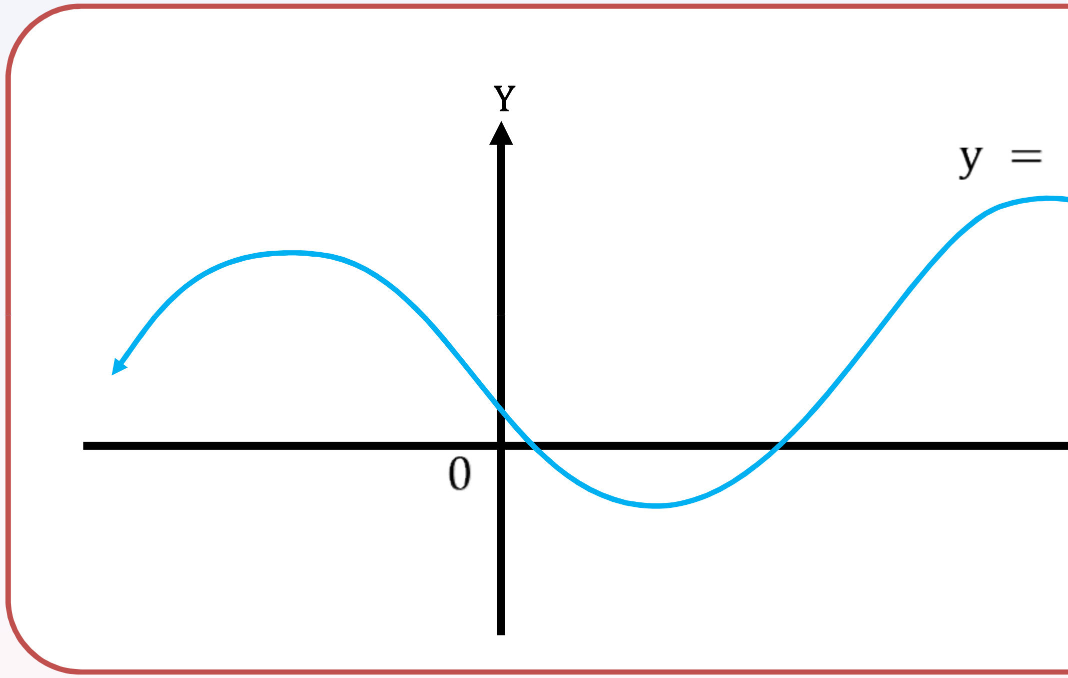
นักเรียนสงสัยใช่ไหมคะว่า จะนำเรื่องอนุพันธ์
มาประยุกต์อย่างไร เราไปศึกษาพร้อม ๆ กันเลยค่ะ

ต์ของอนุพันธ์

การประยุกต์เรื่องแรก คือ
การหาฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ให้นักเรียนพิจารณากราฟต่อไปนี้

นักเรียนคิดว่า ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ช่วงใดเป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงใดเป็นฟังก์ชันลด ?

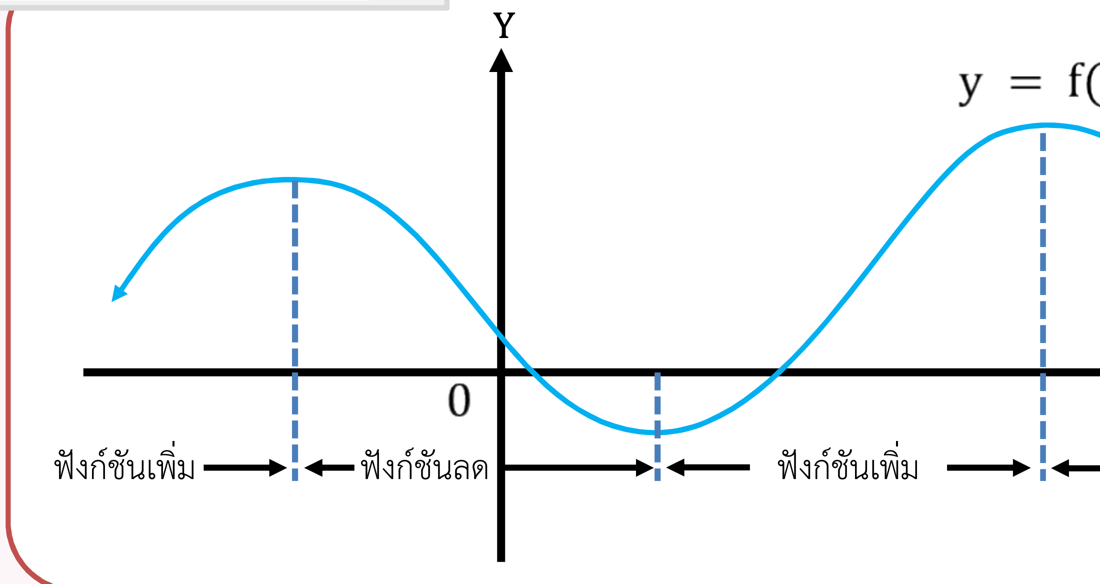


ต์ของอนุพันธ์

จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีทั้งช่วงที่ค่าของ x และ y มีความสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกันและทิศทางตรงข้ามกัน

ซึ่งช่วงที่ค่าของ x และ y มีความสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกัน เราเรียกว่า **f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม** ดังรูป

และช่วงที่ค่าของ x และ y มีความสัมพันธ์ในทิศทางตรงข้ามกัน เราเรียกว่า **f เป็นฟังก์ชันลด** ดังรูป



ต์ของอนุพันธ์

จากที่กล่าวมา

สอดคล้องกับบทนิยามที่นักคณิตศาสตร์สร้างไว้ ดังนี้

ป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A

ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

f เป็นฟังก์ชันลดใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A

ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

ต์ของอนุพันธ์

และยังมีอีกหนึ่งวิธีในการหาช่วงของฟังก์ชันเพิ่ม
และฟังก์ชันลด คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
ณ จุด x ใดๆ ในช่วงนั้นๆ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ท 7

f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $A \subset D_f$

1. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันลด**บนช่วง A
2. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม**บนช่วง A

ต่อไปเราจะมาศึกษาตัวอย่างการหาฟังก์ชันเพิ่ม
และฟังก์ชันลดกันนะคะ

3 กำหนด $\mathbf{f(x) = 6x - 2x^3}$ ให้หาช่วงที่ $\mathbf{f}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและ $\mathbf{f}$ เป็นฟังก์ชันลด

จาก $f(x) = 6x - 2x^3$

จะได้ $f'(x) = 6 - 6x^2$

$= 6(1 - x^2)$

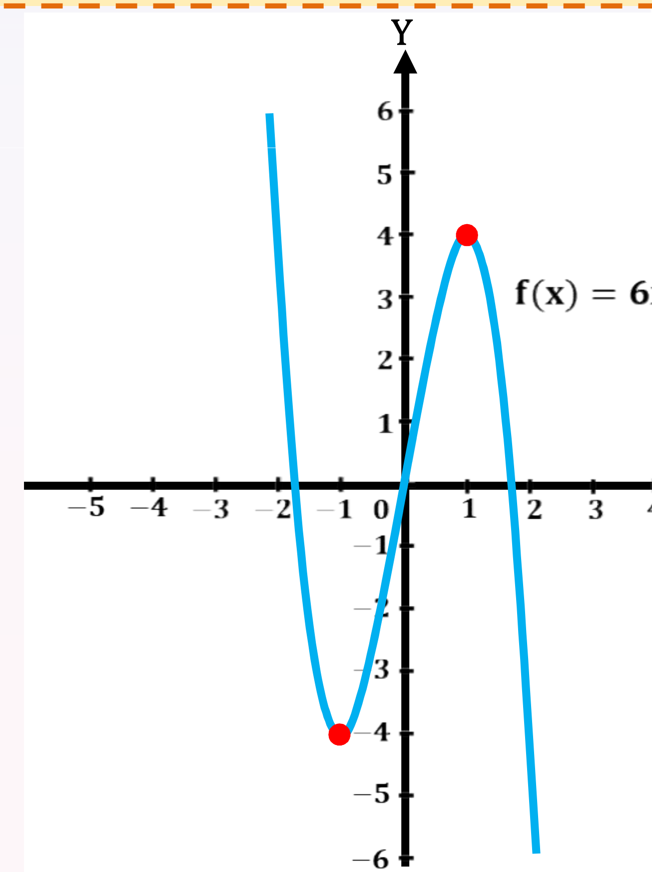
$= 6(1 - x)(1 + x)$

นำ $f'(x)$ มาพิจารณาเครื่องหมายบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$
$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$

นั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-1, 1)$

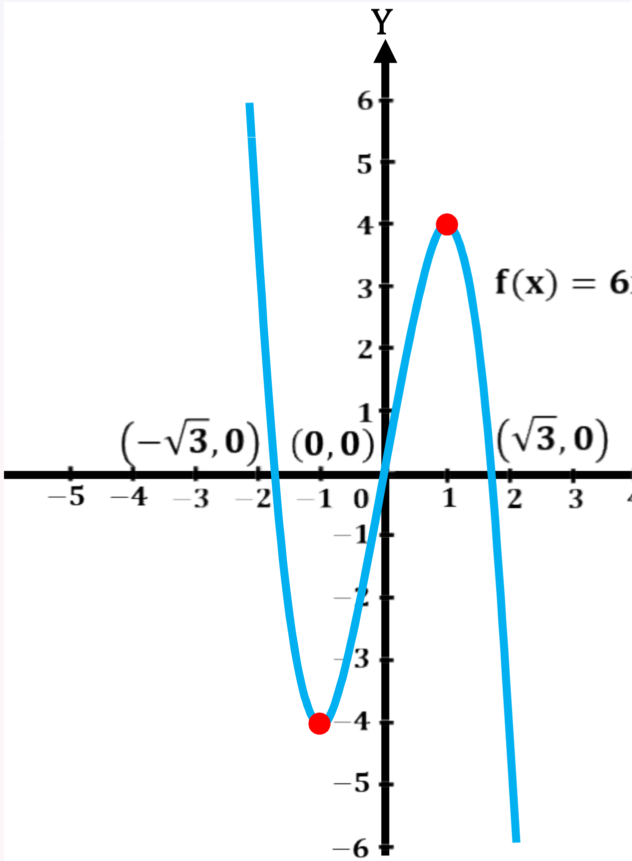


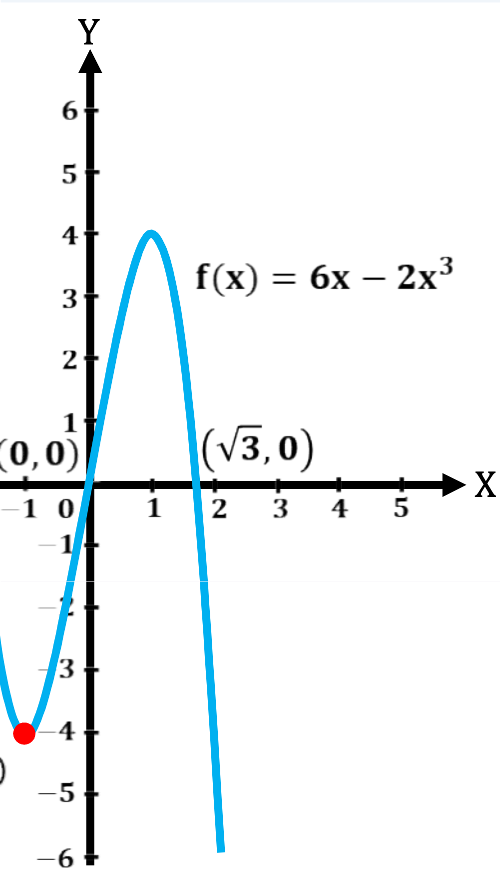
ต์ของอนุพันธ์

การประยุกต์เรื่องถัดไป คือ
การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์

จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะเห็นว่า กราฟของ $f(x) = 6x - 2x^3$
ตัดแกน X ที่จุด $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ จุด $(0, 0)$ และจุด $\left(\sqrt{3}, 0\right)$

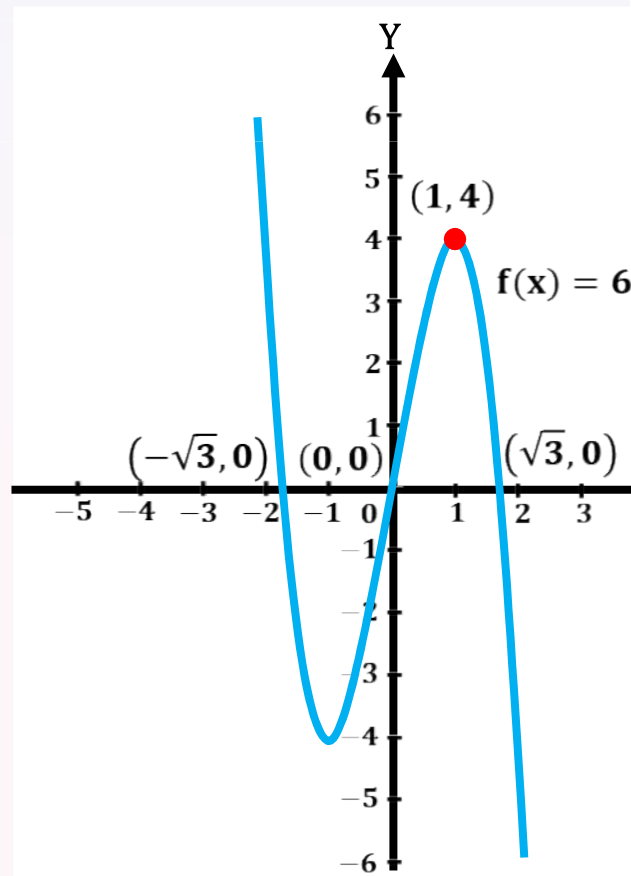
นักเรียนคิดว่า จุดสีแดงที่อยู่ในบนช่วง $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$
และบนช่วง $\left(0, \sqrt{3}\right)$ เป็นจุดสูงสุดหรือต่ำสุดบนช่วงนั้น ๆ





จากกราฟ $f(x) = 6x - 2x^3$ บนช่วง $(-\sqrt{3}, 0)$
จะเห็นว่า จุดสีแดง คือ จุด $(-1, -4)$ ซึ่งเป็นจุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f
บนช่วง $(-\sqrt{3}, 0)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่ม
ดังนั้น จุด$(-1, -4)$ เป็นจุดต่ำสุด

ฟ $f(x) = 6x - 2x^3$ บนช่วง $(0, \sqrt{3})$
า จุดสีแดง คือ จุด $(1, 4)$ ซึ่งเป็นจุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f
$(0, \sqrt{3})$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่มเป็นฟังก์ชันลด
ด $(1, 4)$ เป็นจุดสูงสุด



ต์ของอนุพันธ์

คำตอบที่ได้จากตัวอย่าง สอดคล้องกับบทนิยามต่อไปนี้

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \geq f(x)$
รับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์**ของฟังก์ชัน f และ**จุดสูงสุดสัมพัทธ์** คือ $(c, f(c))$

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \leq f(x)$
รับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**ของฟังก์ชัน f และ**จุดต่ำสุดสัมพัทธ์** คือ $(c, f(c)$

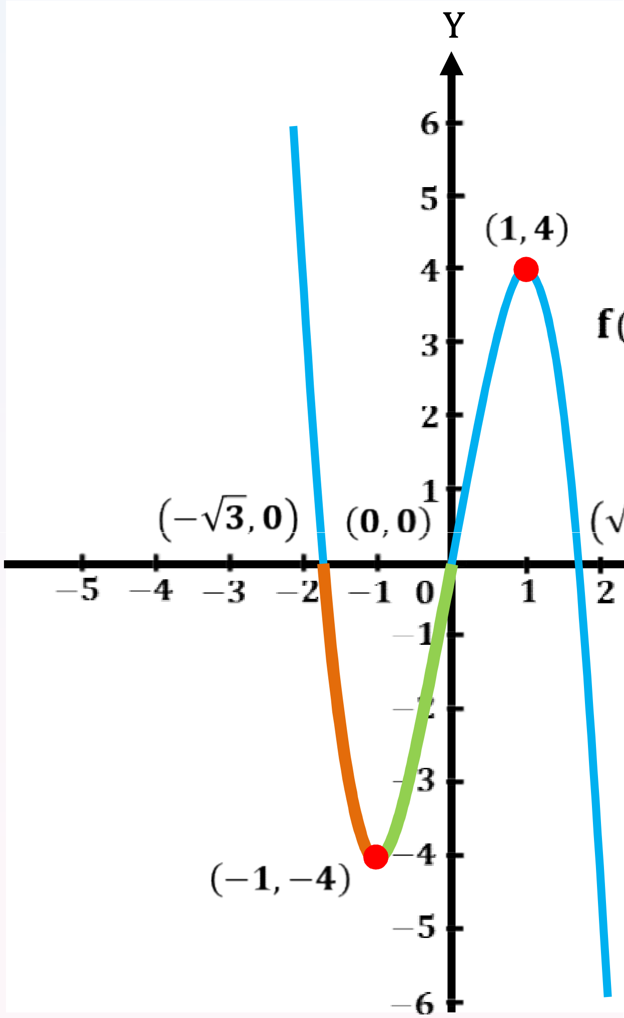
ต์ของอนุพันธ์

นักเรียนทราบมาแล้วว่า จุด $(-1, -4)$ เป็นจุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f บนช่วง $(-\sqrt{3}, 0)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ว่า เมื่อ $x \in (-\sqrt{3}, -1)$ ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นจำนวนลบ หรือ $f'(x) < 0$

และเมื่อ $x \in (-1, 0)$ ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นจำนวนบวก หรือ $f'(x) > 0$

ดังนั้น เมื่อ $x = -1$ ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ 0 หรือ $f'(-1) = 0$

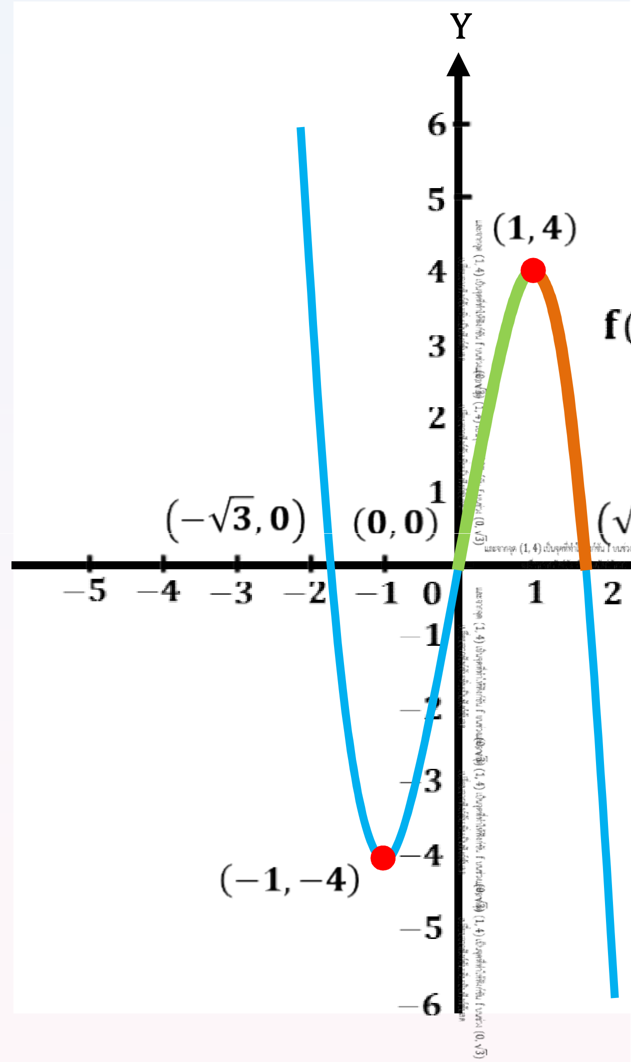


และจากจุด $(1, 4)$ เป็นจุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f บนช่วง $(0, \sqrt{3})$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่มเป็นฟังก์ชันลด

จะได้ว่า เมื่อ $x \in (0, 1)$ ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นจำนวนบวก หรือ $f'(x) > 0$

และเมื่อ $x \in (1, \sqrt{3})$ ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นจำนวนลบ หรือ $f'(x) < 0$

ดังนั้น เมื่อ $x = 1$ ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ 0 หรือ $f'(1) = 0$



ต์ของอนุพันธ์

จากข้อสรุปที่ได้นั้นสอดคล้องกับทฤษฎีบทและบทนิยามต่อไปนี้

8

เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน
) หาค่าได้ แล้ว $f'(c) = 0$

นด f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ค่าของ $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$
c ที่สอดคล้องกับสมการนี้ว่า **ค่าวิกฤต**ของฟังก์ชัน f

ต์ของอนุพันธ์

นักเรียนคะ นอกจากค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน f จะสามารถบอกได้ว่า ฟังก์ชัน f ที่จุดใดให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์แล้ว

ค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ก็สามารถบอกได้เช่นกันว่ ฟังก์ชัน f ที่จุดใดให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์

ซึ่งค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ก็คือ ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f'(x)$

ต์ของอนุพันธ์

โดยค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้

เราลองไปศึกษาตัวอย่างพร้อม ๆ กันเลยค่ะ

10

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง A ใด ๆ และ c เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f ซึ่ง $f'(c) = 0$

$(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็น**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**

$(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็น**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์**

ให้หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน เมื่อ $\mathbf{f(x) = x^3 - 3x^2 + 2}$

จาก $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$= 3x(x - 2)$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $3x(x - 2) = 0$

$x = 0, 2$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $x = 0$ และ $x = 2$

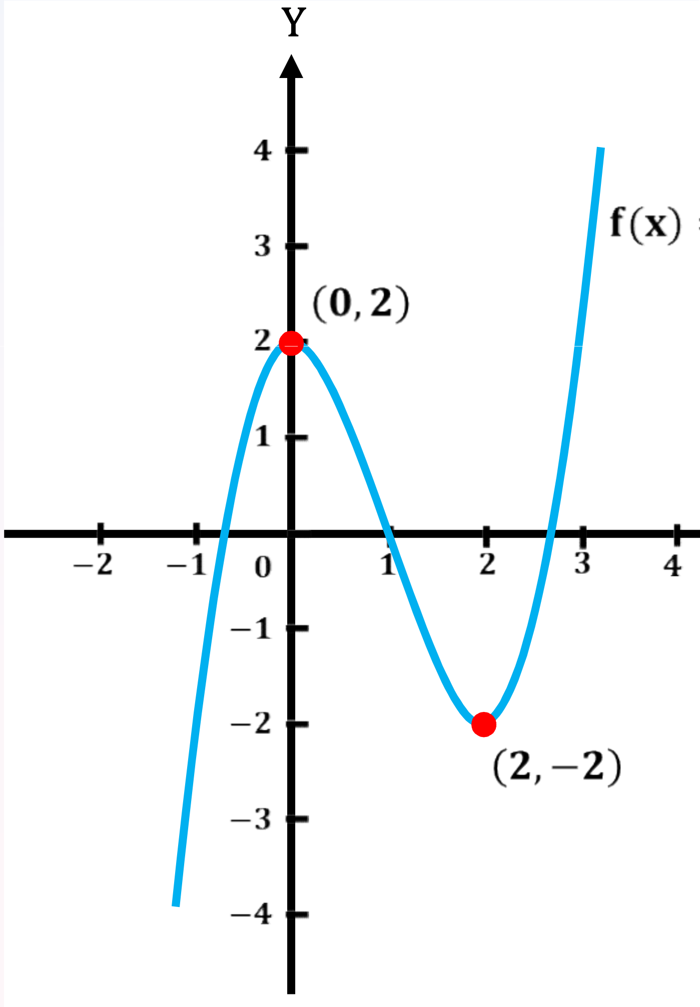
ทดสอบจุดวิกฤตทั้ง 2 ของฟังก์ชัน จะได้ $f''(x) = 6x - 6$

เนื่องจาก $f''(0) = 6(0) - 6 = -6$ ซึ่งน้อยกว่า 0

$f''(2) = 6(2) - 6 = 6$ ซึ่งมากกว่า 0

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ คือ $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 2 = 2$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 2$ คือ $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 = -2$



ต์ของอนุพันธ์

จากที่นักเรียนได้ศึกษา เรื่อง ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ นักเรียนจะทราบว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์มีได้หลายค่า

แต่เมื่อเราต้องการจุดสูงสุดและต่ำสุดเพียงจุดเดียว จุดเหล่านั้น จะเรียกว่า **จุดสูงสุดสัมบูรณ์และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์** ตามลำดับ ดังบทนิยามต่อไปนี้

ชัน f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f

ชัน f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f

ซึ่งการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์
เราจะพิจารณาบนช่วง $[a, b]$ โดยมีขั้นตอน ดังนี้

เมื่อเราทราบขั้นตอนกันแล้ว เราลองนำขั้นตอนเหล่านี้ไปหา
ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f
ในตัวอย่างต่อไปกันเลยค่ะ

1. หาค่าวิกฤตในช่วง $[a, b]$
2. หาค่าของฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤตที่ได้จากข้อ 1.
3. หาค่าของ $f(a)$ และ $f(b)$
4. เปรียบเทียบค่าที่ได้จากข้อ 2. และ 3.
    - ค่าที่มากที่สุดจากข้อ 2. และ 3. คือ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f
    - ค่าที่น้อยที่สุดจากข้อ 2. และ 3. คือ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ให้หาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน เมื่อ $\mathbf{f(x) = x^3 - 6x}$ บนช่วง $[-\mathbf{2}, \mathbf{2}]$

จาก $f(x) = x^3 - 6x$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 6$

$= 3(x^2 - 2)$

$= 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

$x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $x = -\sqrt{2}$ และ $x = \sqrt{2}$

หาค่าของฟังก์ชันที่ค่าวิกฤตและที่จุดปลายของช่วง $[-2, 2]$

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 6(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \approx 5.66$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} \approx -5.66$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 6(-2) = 4$$

$$f(2) = 2^3 - 6(2) = -4$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -\sqrt{2}$ คือ $f(-\sqrt{2}) \approx 5.66$

f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = \sqrt{2}$ คือ $f(\sqrt{2}) \approx -5.66$

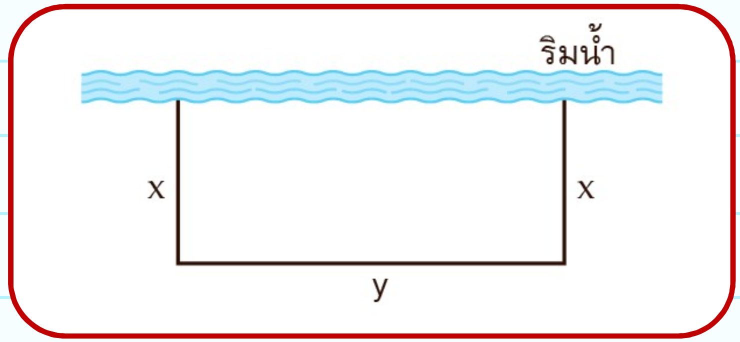
นอกจากนี้ เรายังสามารถนำค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด
ไปประยุกต์ใช้กับโจทย์ปัญหาได้อีกด้วยนะคะ

โดยการแก้โจทย์ปัญหานั้น ๆ มีขั้นตอน ดังนี้

เมื่อเราทราบขั้นตอนแล้ว
ไปศึกษาตัวอย่างการประยุกต์พร้อม ๆ กัน

1. อ่านโจทย์ให้ละเอียดและวิเคราะห์ว่าโจทย์ต้องการค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
2. กำหนดสิ่งนั้นเป็นตัวแปรตามความเหมาะสม และบางครั้งอาจวาดรูปประกอบ
3. สมมติอีกหนึ่งตัวแปรตามความเหมาะสมที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดตามข้อ 1. และ 2. พร้อมเขียนแสดงค
ระหว่างตัวแปรทั้งหมดให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน
4. ใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1 หรือ 2 ของฟังก์ชันในการวิเคราะห์ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
5. เขียนคำตอบให้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ลุงเชิดมีรั้วลวดหนามยาว **280** เมตร และต้องการล้อมรั้วที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าริมน้ำ ซึ่งลุงเชิดจะไม่ล้อมรั้วด้านยา
ด้านหนึ่งที่ติดกับแม่น้ำ ถ้าลุงเชิดต้องการล้อมรั้วให้มีพื้นที่มากที่สุด แล้วลุงเชิดต้องล้อมรั้วให้มีความกว้างและความย



กำหนดให้ x แทนความกว้างของพื้นที่

y แทนความยาวของพื้นที่

จะได้ว่า $2x + y = 280$

$y = 280 - 2x$

กำหนดให้ A แทนพื้นที่ของพื้นที่ที่จะล้อมรั้ว

จะได้ว่า $A(x) = x(280 - 2x)$

$= 280x - 2x^2$

และ $A'(x) = 280 - 4x$

ให้ $A'(x) = 0$ จะได้ว่า $280 - 4x = 0$

$x = 70$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน A คือ $x = 70$

จาก $A'(x) = 280 - 4x$

จะได้ว่า $A''(x) = -4$

$A''(70) = -4$ ซึ่งน้อยกว่า 0

จะได้ว่า $x = 70$ เป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชัน A มีค่าสูงสุด

ลุงเชิดต้องล้อมรั้วให้มีความกว้าง 70 เมตร

และความยาว $280 - 2(70) = 140$ เมตร

จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด

ร์ของฟังก์ชัน

ต่อไปเราจะมาศึกษากระบวนการตรงข้ามกับ
การหาอนุพันธ์ ซึ่งเรียกว่า การหา**ปฏิยานุพันธ์**
จากสถานการณ์ตัวอย่างกันนะคะ

นักเรียนยังจำกันได้ไหมคะว่า ระยะทาง เวลา
และความเร็วของวัตถุมีความสัมพันธ์กันอย่างไร ?

จากความสัมพันธ์ นักเรียนสามารถอธิบาย
กระบวนการคิดได้อย่างไรบ้างคะ ?

ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง (s) เวลา (t) และความเร็ว (v) ของวัตถุ คือ

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}$$

ถ้าสมมติให้เก่งและแก้มขับรถยนต์ไปทำงาน

โดยมีสมการของระยะทางในการเคลื่อนที่ (s) ดังนี้

เมื่อเราหาสมการของความเร็วในการเคลื่อนที่

ของเก่งและแก้มจากความสัมพันธ์ $v = \dfrac{ds}{dt}$ จะได้ว่า

นักเรียนสังเกตหรือไม่ว่า สมการของความเร็ว

ในการเคลื่อนที่ของเก่งและแก้มเป็นอย่างไร ?

สมการของระยะทางในการเคลื่อนที่ของเก่ง คือ $s_1 = t^2 + 5t - 1$

สมการของระยะทางในการเคลื่อนที่ของแก้ม คือ $s_2 = t^2 + 5t + 3$

สมการของความเร็วในการเคลื่อนที่ของเก่ง คือ $v_1 = 2t + 5$

สมการของความเร็วในการเคลื่อนที่ของแก้ม คือ $v_2 = 2t + 5$

ร์ของฟังก์ชัน

จากสมการของความเร็วในการเคลื่อนที่ของเก่งและแก้ม
นักเรียนจะเห็นว่า เป็นสมการเดียวกัน

ทำให้เราทราบว่า สมการของความเร็วในการเคลื่อนที่สมการห
สามารถหาได้จากสมการของระยะทางในการเคลื่อนที่มากกว่าหนึ่

ดังนั้น จากสถานการณ์ข้างต้น ทำให้เราสรุปได้ว่า
สมการของความเร็วในการเคลื่อนที่ $v = 2t + 5$ หาได
สมการของระยะทางในการเคลื่อนที่ $s = t^2 + 5t + c$ เมื่อ c

หรือกล่าวได้ว่า
สมการของความเร็วหาได้จากอนุพันธ์ของสมการของระยะทาง
แต่สมการของระยะทางหาได้จากกระบวนการตรงข้ามกับ
การหาอนุพันธ์ เรียกว่า **ปฏิยานุพันธ์**

ร์ของฟังก์ชัน

จากที่กล่าวมา เป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

ซึ่งปฏิยานุพันธ์หาได้จากสูตรอนุพันธ์ ดังนี้

ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f
แล้วฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f

จากสูตรการหาอนุพันธ์ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

จะได้ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right) = x^{n-1}$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

กำหนดให้ $F'(x) = f(x)$ จะเรียก $F(x) + c$ ว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** ของ $f(x)$ เขียนแทนด้วย $\int f(x)\,dx$ นั่นคือ

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

ซึ่งการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสามารถใช้สูตรพื้นฐานต่อไปนี้

สูตรที่ 1 $\int k\,dx = kx + c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

สูตรที่ 2 ถ้า $n \neq -1$ แล้ว $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สูตรที่ 3 $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว และ $f(x)$ มีปริพันธ์

สูตรที่ 4 $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพ

สูตรที่ 5 $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพ

เราลองไปศึกษาตัวอย่างการนำสูตรพื้นฐาน
ไปใช้การหาปริพันธ์กันเลยค่ะ

2 ให้หา $\int (\mathbf{x^3 + 3x^2 - 5x + 1})\,\mathbf{dx}$

$$(x^3 + 3x^2 - 5x + 1)\,dx = \int x^3\,dx + \int 3x^2\,dx - \int 5x\,dx + \int 1\,dx$$ ← สูตรที่ 4 และ 5

$$= \int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx - 5\int x\,dx + \int 1\,dx$$ ← สูตรที่ 3

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + x + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ← สูตรที่ 1 และ 2

$$= \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{5x^2}{2} + x + c$$

นั้น $\int (x^3 + 3x^2 - 5x + 1)\,dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{5x^2}{2} + x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3 ให้หา $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}\right)(2x-3)dx$

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}\right)(2x-3)dx = \int (x^{\frac{1}{2}}+x^{-3})(2x-3)dx$$

$$= \int (2x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+2x^{-2}-3x^{-3})dx$$

$$= \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{2x^{-1}}{(-1)}-\frac{3x^{-2}}{(-2)}+c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$= \frac{4x^2\sqrt{x}}{5}-2x\sqrt{x}-\frac{2}{x}+\frac{3}{2x^2}+c$$

ดังนั้น $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}\right)(2x-3)dx = \frac{4x^2\sqrt{x}}{5}-2x\sqrt{x}-\frac{2}{x}+\frac{3}{2x^2}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังตัวอย่างต่อไปนี้ค่ะ

4 กำหนด $\frac{dy}{dx} = 2x^3 - x^2 - 3x + 1$ ให้หา y

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 - x^2 - 3x + 1$$

$$y = \int (2x^3 - x^2 - 3x + 1)dx$$

$$= \int 2x^3 dx - \int x^2 dx - \int 3x\,dx + \int 1\,dx$$

$$= \frac{2x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + c$$

ดังนั้น $y = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จากตัวอย่างการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต นักเรียนคิดว่าเราสามารถนำปริพันธ์ไม่จำกัดเขตไปประยุกต์ใช้กับเรื่องใดได้บ้าง ?

...ำกัดเขต

ในหัวข้อนี้ เราจะนำเสนอการประยุกต์ของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ในทางเรขาคณิตและการเคลื่อนที่ของวัตถุ ดังนี้

5 ให้หาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0, -2)$ และมีความชัน ณ จุด (x, y) ใด ๆ เป็น $2x + 4$

...ากความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 4$$

...สมการเส้นโค้งใด ๆ คือ

$$y = \int (2x+4)\,dx$$

$$= \frac{2x^2}{2} + 4x + c \quad \text{เมื่อ c เป็นค่าคงตัว}$$

$$= x^2 + 4x + c$$

...ทย์ เส้นโค้งผ่านจุด $(0, -2)$ เมื่อแทน x ด้วย 0 และ y ด้วย -2 ในสมการเส้นโค้ง $y = x^2 + 4x + c$

$$-2 = 0^2 + 4(0) + c$$

$$c = -2$$

...สมการเส้นโค้งที่ต้องการ คือ $y = x^2 + 4x - 2$

5

ให้หาความเร็ว $\mathbf{v(t)}$ และตำแหน่งของวัตถุ $\mathbf{s(t)}$ ขณะเวลา $\mathbf{t}$ ใด ๆ เมื่อกำหนด $\mathbf{a(t) = 4t^2}$, $\mathbf{v(0) = 1}$ และ $\mathbf{s}$

าก $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$

$$dv = a(t)\,dt$$

$$v = \int 4t^2\,dt$$

$$= \frac{4t^3}{3} + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ทน t ด้วย 0 และ v(0) ด้วย 1 ในสมการ $v(t) = \dfrac{4t^3}{3} + c$ จะได้

$$1 = \frac{4(0)^3}{3} + c$$

$$c = 1$$

ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ $v(t) = \dfrac{4t^3}{3} + 1$

5 ให้หาความเร็ว $\mathbf{v(t)}$ และตำแหน่งของวัตถุ $\mathbf{s(t)}$ ขณะเวลา $\mathbf{t}$ ใด ๆ เมื่อกำหนด $\mathbf{a(t) = 4t^2, v(0) = 1}$ และ $\mathbf{s(}$

าก $\quad v(t) = \frac{ds}{dt}$

$$ds = v(t)\,dt$$

$$s = \int \left(\frac{4t^3}{3} + 1\right) dt$$

$$= \frac{t^4}{3} + t + k$$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

น t ด้วย 0 และ $s(0)$ ด้วย 2 ในสมการ $v(t) = \frac{t^4}{3} + t + k$ จะได้

$$2 = \frac{0^4}{3} + 0 + k$$

$$k = 2$$

ำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ $v(t) = \frac{t^4}{3} + t + 2$

ัดเขต

ต่อไปเราจะมาศึกษาปริพันธ์จำกัดเขตกันนะคะ

ซึ่งปริพันธ์จำกัดเขตต้องอาศัยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ดังนี้

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

เรียก a ว่า ลิมิตล่าง และเรียก b ว่า ลิมิตบน

นอกจากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสนี้แล้วยังมีสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต ดังต่อไปนี้

สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

3. $\int_a^b [f(x) + g(x)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)] = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

6. ถ้า $a < c < b$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

...ัดเขต

7 ให้หาค่าของ $\int_{1}^{3}(x^2+2x-2)dx$

เราไปศึกษาตัวอย่าง
การหาปริพันธ์จำกัดเขตกันเลยค่ะ

...ากโจทย์ $F'(x) = x^2+2x-2,\ a=1$ และ $b=3$

...ะได้ $F(x) = \int(x^2+2x-2)dx$

$= \dfrac{x^3}{3}+x^2-2x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

...งนั้น $F(b)-F(a) = F(3)-F(1)$

$= \left[\dfrac{3^3}{3}+3^2-2(3)+c\right]-\left[\dfrac{1^3}{3}+1^2-2(1)+c\right]$

$= 12-\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

$= 12\dfrac{2}{3}$

...นคือ $\int_{1}^{3}(x^2+2x-2)dx = 12\dfrac{2}{3}$

ัดเขต

จากตัวอย่างจะเห็นว่า การหาฟังก์ชัน **F** เราไม่จำเป็นต้องเขียนค่าคงตัว **c**
เพราะเมื่อแทนค่า F(b) − F(a) แล้วค่าคงตัว **c** จะหักล้างกันหมดไป

เมื่อนักเรียนเข้าใจแล้ว เราไปศึกษาตัวอย่างเพิ่มเติมเกี่ยวกับการหาปริพันธ์จำกัดเขตกันเลยค่ะ

3 กำหนด $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 - 3} & \text{เมื่อ } \mathbf{x < -1} \\ \mathbf{x^2 + 5x - 1} & \text{เมื่อ } \mathbf{x \geq -1} \end{cases}$ ให้หาค่าของ $\displaystyle\int_{-2}^{0} \mathbf{f(x)dx}$

ฟังก์ชัน f แบ่งเป็นสองเงื่อนไข เมื่อ $x = -1$

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 3)dx + \int_{-1}^{0} (x^2 + 5x - 1)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$= \left[\left[\frac{(-1)^3}{3} - 3(-1)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)\right]\right] + \left[\left[\frac{0^3}{3} + \frac{5(0)^2}{2} - 0\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{5(-1)^2}{2}\right.\right.$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{19}{6} = -3\frac{5}{6}$$

มด้วยเส้นโค้ง

การหาปริพันธ์จำกัดเขตเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันบนช่วง $[a, b]$ ซึ่งสามารถนำเรื่องนี้มาประยุกต์กับการหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชัน f กับแกน X หรือแกน Y ได้

สำหรับการหาพื้นที่ปิดล้อมจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ พื้นที่ปิดล้อมเหนือแกน X และพื้นที่ปิดล้อมใต้แกน X โดยพื้นที่ปิดล้อมแต่ละลักษณะสอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ท 11

นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง f กับแกน X จาก $x = a$ ถึง $x =$

$x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่เหนือแกน X แล้ว $A = \int_a^b f(x)dx$

$x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ใต้แกน X แล้ว $A = -\int_a^b f(x)dx$

มด้วยเส้นโค้ง

ให้หาพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \frac{1}{5}\left(x^3 - x^2 - 9x + 9\right)$ กับแกน X

นพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \frac{1}{5}(x^3 - x^2 - 9x + 9)$ กับแกน X

จุดที่เส้นโค้งตัดแกน X โดยให้ $y = 0$ จะได้

$$0 = \frac{1}{5}(x^3 - x^2 - 9x + 9)$$

$$x^2 - 9x + 9 = 0$$

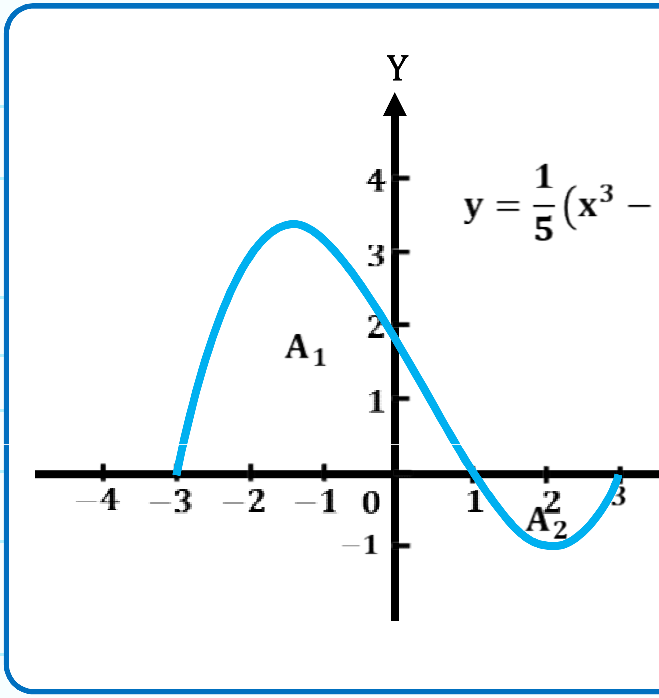
$$-1)(x-3) = 0$$

$$x = -3,\ 1,\ 3$$

ตัดแกน X ที่จุด $(-3,0)$ จุด $(1,0)$ และจุด $(3,0)$

งส่วนของเส้นโค้ง $y = \frac{1}{5}(x^3 - x^2 - 9x + 9)$ อยู่ใต้แกน X

งพื้นที่ปิดล้อมเป็น 2 ช่วง ดังรูป



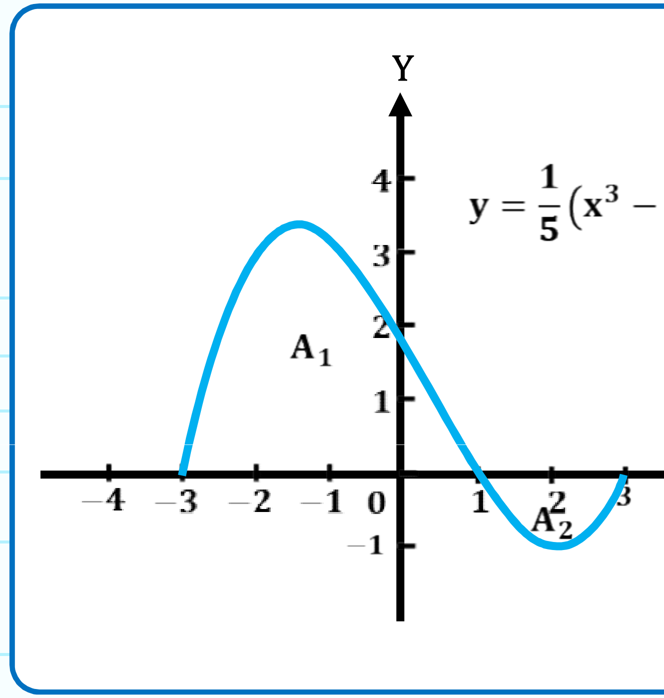
นที่ปิดล้อม $A_1 = \int_{-3}^{1} \frac{1}{5}(x^3 - x^2 - 9x + 9)dx$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 9x\right)\Bigg|_{-3}^{1}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} - \frac{9(1)^2}{2} + 9(1)\right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{9(-3)^2}{2} + 9(-3)\right]\right] = 8\frac{8}{15}$$

ให้หาพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $\mathbf{y=\frac{1}{5}\left(x^3-x^2-9x+9\right)}$ กับแกน X

นพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=\frac{1}{5}(x^3-x^2-9x+9)$ กับแกน X



จุดที่เส้นโค้งตัดแกน X โดยให้ $y=0$ จะได้

$$0 = \frac{1}{5}(x^3-x^2-9x+9)$$

$$x^2-9x+9 = 0$$

$$-1)(x-3) = 0$$

$$x = -3,\ 1,\ 3$$

งตัดแกน X ที่จุด $(-3,0)$ จุด $(1,0)$ และจุด $(3,0)$

งส่วนของเส้นโค้ง $y=\frac{1}{5}(x^3-x^2-9x+9)$ อยู่ใต้แกน X

งพื้นที่ปิดล้อมเป็น 2 ช่วง ดังรูป

นที่ปิดล้อม $A_2 = -\int_1^3 \frac{1}{5}(x^3-x^2-9x+9)dx$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{9x^2}{2}+9x\right)\Bigg|_1^3 = -\frac{1}{5}\left[\left[\frac{3^4}{4}-\frac{3^3}{3}-\frac{9(3)^2}{2}+9(3)\right]-\left[\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}-\frac{9(1)^2}{2}+9(1)\right.\right.$$

งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=\frac{1}{5}(x^3-x^2-9x+9)$ กับแกน X เท่ากับ $A_1+A_2=9\frac{13}{15}$ ตารางหน่วย

มด้วยเส้นโค้ง

นอกจากนี้ การหาปริพันธ์จำกัดเขตเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันบนช่วง $[a, b]$ ยังสามารถนำมาประยุกต์กับการหาพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งได้อีกด้วย

ซึ่งพื้นที่ปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งบนช่วง $[a, b]$ หาได้จากสูตร

พื้นที่ปิดล้อม $A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$

มด้วยเส้นโค้ง

ให้หาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งพาราโบลา $\mathbf{y = x^2 - 2x}$ และเส้นตรง $\mathbf{y = 2 - x}$

เขียนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2 - 2x$ และเส้นตรง $y = 2 - x$

รหาจุดตัดของเส้นโค้งและเส้นตรง โดยให้

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 2 - x \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x &= -1,\ 2 \end{aligned}$$

ตัดสองจุด คือ จุด $(-1, 3)$ และจุด $(2, 0)$ ดังรูป

$f_1(x) = x^2 - 2x$ และ $f_2(x) = 2 - x$

$$\text{นที่ปิดล้อม } A = \int_{-1}^{2} [(2 - x) - (x^2 - 2x)]dx$$

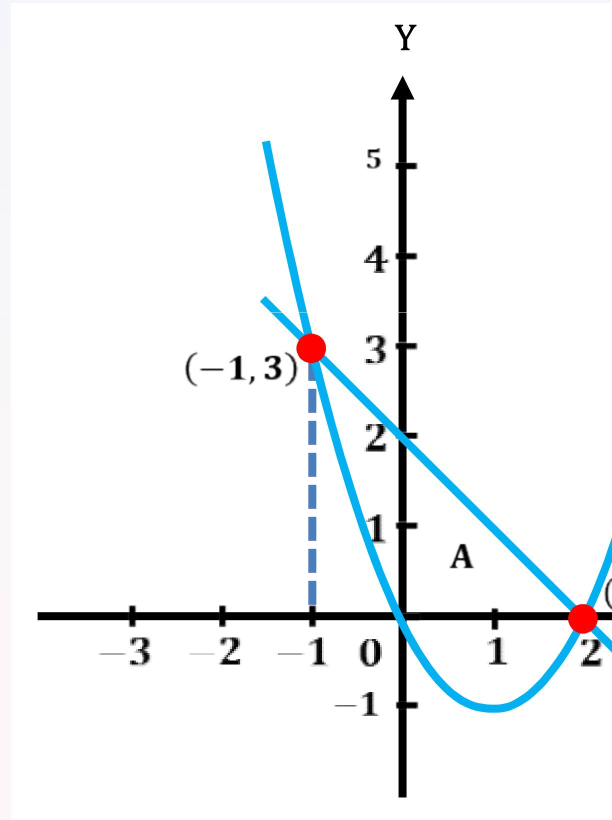
$$= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)dx$$

$$= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left[2(2) + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right] - \left[2(-1) + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3}\right]\right] = 4\frac{1}{2}$$

นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2 - 2x$ และเส้นตรง $y = 2 - x$

ากับ $4\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย



นักเรียนยังจำคำถามในตอนต้นเกี่ยวกับ
แรงขับเคลื่อนของจรวดได้ไหมคะ ?

“แรงขับเคลื่อนของจรวดหาได้จากสูตร $F = \dfrac{d(mv)}{dt}$ ซึ่งมาจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน โดย m และ v คือ มวลและความเร็วของวัตถุ ตามลำดับ”

เราจะนำความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัสมาหาแรงขับเคลื่อนของจรวดได้อย่างไร ?

แรงขับเคลื่อนของจรวดหาได้จากสูตร $F = \dfrac{d(mv)}{dt}$ ซึ่งมาจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน โดย m และ v คือ มวลและความเร็วของวัตถุ ตามลำดับ

วิธีทำ จากสูตรการหาแรงขับเคลื่อนของจรวด $F = \dfrac{d(mv)}{dt}$ โดย m และ v คือ มวลและความเร็ว
ตามลำดับ นักเรียนจะเห็นว่า แรงขับเคลื่อน F หาได้จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเราสามาร
การหาอนุพันธ์มาช่วยได้ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{d(mv)}{dt} \\
&= m\frac{d}{dt}(v) + v\frac{d}{dt}(m)
\end{aligned}
$$

เป็นอย่างไรกันบ้างคะ สำหรับการนำความรู้
เกี่ยวกับแคลคูลัสที่เราศึกษามาประยุกต์ใช้กับชีวิตจริง

นักเรียนได้รับความรู้ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น
อย่างครบถ้วนแล้ว หวังว่านักเรียนจะนำความรู้ไปใช้
ในชีวิตจริงได้อีกหลาย ๆ เรื่องเลยนะคะ

แล้วพบกันใหม่ค่ะ