



ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

1. ประพจน์ (Proposition)

บทนิยาม ประพจน์ คือ ประโยคหรือข้อความที่สามารถบอกค่าความจริงว่าเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ความเป็นจริง หรือ เท็จ ของประพจน์ เราเรียกว่า ค่าความจริงของประพจน์ ในที่นี้เราจะใช้ตัวอักษร T และ F แทนค่าความจริงที่เป็นจริง และเป็นเท็จ ตามลำดับ

ประโยคที่ไม่เป็นประพจน์ คือ ประโยคที่ไม่มีค่าความจริง ซึ่งพอจะแยกได้เป็น 2 ประเภท

ประเภทที่ 1 ได้แก่ประโยคที่ไม่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ เช่น ประโยคคำถาม คำสั่ง ห้าม ขอร้อง คำอุทาน หรือ อ้อนวอน เป็นต้น

ประเภทที่ 2 ได้แก่ประโยคบอกเล่า หรือปฏิเสธ แต่ไม่มีค่าความจริง เนื่องจากสิ่งที่เราไม่ทราบว่าเป็นอะไรแน่ชัด ซึ่งเรียกว่าตัวแปร จึงบอกไม่ได้ว่า เป็นจริงหรือเท็จ

ตัวอย่าง จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์จงบอกค่าความจริงของประพจน์นั้น

| ประโยค | เป็นประพจน์ | ไม่เป็นประพจน์ | ค่าความจริง |
|-------------------------------------|-------------|----------------|-------------|
| ช้างเป็นสัตว์สี่ขา | | | |
| ข้าวเป็นอาหารหลักของคนไทย | | | |
| ห้ามส่งเสียงดัง | | | |
| เขาเป็นนักเรียนที่เก่งที่สุด | | | |
| เดือนมกราคมมี 30 วัน | | | |
| ช่วยด้วยครับ | | | |
| จงหาเซตคำตอบของสมการ $x + 2 = 0$ | | | |
| π เป็นจำนวนตรรกยะ | | | |
| $x - 2 = 10$ | | | |
| ลูกรักเป็นคนน่ารัก | | | |
| ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก | | | |
| ครูป๊อบหล่อกว่าลูกรัก | | | |
| ลูกรักและป้าแต๋นมิได้เป็นผู้มีมลทิน | | | |



2. การเชื่อมประพจน์ (Connective)

ประโยคบางประโยคเกิดจากประโยคย่อยๆ แต่ละประโยคจะมี “ตัวเชื่อม” ซึ่งตัวเชื่อมพื้นฐานของประพจน์ มี 4 ตัว ได้แก่ ตัวเชื่อม

| | | |
|--------------|---------------------|-------------------|
| และ | ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย | \wedge |
| หรือ | ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย | \vee |
| ถ้า ... แล้ว | ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย | \rightarrow |
| ก็ต่อเมื่อ | ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย | \leftrightarrow |

บทนิยาม ประพจน์ย่อย และ ประพจน์เชิงประกอบ

- (1) เรียกประพจน์ที่นำมาเชื่อมด้วยตัวเชื่อมต่างๆว่า ประพจน์ย่อย (atomic proposition)
- (2) เรียกประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมของประพจน์ย่อยว่า ประพจน์เชิงประกอบ (compound proposition)

ในหัวข้อนี้เราสนใจศึกษาว่า ประพจน์สองประพจน์เมื่อนำมาเชื่อมด้วยตัวเชื่อม จะได้ประพจน์ใหม่ที่มีค่าความจริงเป็นเช่นไร ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับค่าความจริงของประพจน์เดิมและตัวเชื่อมด้วย

2.1 ค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อมต่างๆ

กำหนดให้ p และ q แทนประพจน์ใด ๆ

ให้ T แทนค่าความจริงของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

F แทนค่าความจริงของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตารางแสดงค่าความจริงของการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อมต่างๆ

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | T | F | T | T | F |
| F | F | F | F | T | T |



หมายเหตุ : ข้อสังเกตจากตาราง

1. $p \wedge q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่
 $p \wedge q$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p หรือ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ อย่างน้อยหนึ่งประพจน์
2. $p \vee q$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่
 $p \vee q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p หรือ q มีค่าความจริงเป็นจริง อย่างน้อยหนึ่งประพจน์
3. $p \rightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ
 $p \rightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p มีค่าความจริงเป็นเท็จ
 $p \rightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ q มีค่าความจริงเป็นจริง
4. $p \leftrightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน
 $p \leftrightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงต่างกัน

2.2 นิเสธของประพจน์

การสร้างประพจน์ใหม่จากประพจน์ที่กำหนดให้ นอกจากจะใช้วิธีการเชื่อมประพจน์ดังที่ได้กล่าวไปแล้ว เรายังสามารถสร้างประพจน์ใหม่ได้อีกแบบหนึ่งคือ ใช้การเติมข้อความ “ไม่เป็นความจริงที่ว่า” ลงหน้าประพจน์เดิม เรียกประพจน์ใหม่ที่ได้นี้ว่า นิเสธของประพจน์เดิม ดังนิยามดังนี้

บทนิยาม ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ นิเสธของประพจน์ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$
 นิเสธของประพจน์ หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์เดิม

ตารางแสดงค่าความจริงของการนิเสธประพจน์

| p | $\sim p$ |
|-----|----------|
| T | F |
| F | T |



ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ p แทน 2 เป็นจำนวนคู่
 q แทน 2 เป็นจำนวนเฉพาะ
 r แทน 2 เป็นจำนวนอตรรกยะ
 จงหาค่าความจริงของประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge r$

(3) $\sim q \wedge r$

(4) $p \vee q$

(5) $p \vee r$

(6) $q \vee \sim r$

(7) $p \rightarrow \sim q$

(8) $p \rightarrow r$

(9) $q \rightarrow r$

(10) $\sim r \rightarrow p$

(11) $p \leftrightarrow q$

(12) $\sim q \leftrightarrow r$

ตัวอย่าง 2 กำหนดประพจน์ให้ต่อไปนี้

p แทน \emptyset เป็นเซตจำกัด

q แทน \emptyset เป็นสับเซตแท้ของทุกเซต

r แทน $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

s แทน $\emptyset \cup A = \emptyset$

จงหาค่าความจริงของประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $(p \wedge q) \rightarrow r$

(2) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$

(3) $\sim s \wedge (r \vee \sim q)$

(4) $(p \rightarrow \sim r) \leftrightarrow (\sim s \wedge q)$

(5) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow (\sim r \leftrightarrow s))$

(6) $(q \vee \sim p) \leftrightarrow (r \rightarrow \sim s)$



ตัวอย่าง 3 จงเขียนประโยคต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ และหาค่าความจริงของประพจน์

- (1) 6 เป็นจำนวนคู่ และ 3 เป็นจำนวนคี่ (2) 2 เท่ากับ 4 หรือ 5 เท่ากับ 0
- (3) ถ้าปลาบินได้แล้วนกจะเป็นสัตว์น้ำ (4) $-2 < 0$ ก็ต่อเมื่อ $2 > 0$
- (5) 6 กับ 10 เป็นจำนวนคี่ (6) $\pi \in Q'$ แต่ $\frac{22}{7} \in Q$

ตัวอย่าง 4 กำหนดประพจน์ p, q จงตอบคำถามต่อไปนี้

- (1) ถ้าประพจน์ $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็น T แล้วหาค่าความจริงของ $p \vee q$
- (2) ถ้าประพจน์ $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็น F แล้วหาค่าความจริงของ $p \rightarrow q$
- (3) ถ้าประพจน์ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็น F แล้วหาค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$
- (4) ถ้าประพจน์ $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็น F แล้วหาค่าความจริงของ $p \wedge q$

ตัวอย่าง 5 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

- (1) 5 มากกว่า 0 (2) โลกเป็นดาวฤกษ์
- (3) 4 หาร 30 ลงตัว (4) $2 \times 5 = 0$
- (5) $\emptyset \subset \emptyset$ (6) 6 เป็นตัวประกอบของ 20



3. การหาค่าความจริง

ในหัวข้อนี้มีจุดประสงค์เพื่อหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบ เมื่อทราบค่าความจริงของประพจน์ย่อย หรืออาจจะไม่ทราบค่าความจริงของประพจน์ย่อยเลย ซึ่งจะมีวิธีการหาค่าความจริงแตกต่างกัน ดังนี้

3.1 การหาค่าความจริงเมื่อกำหนดค่าความจริงของประพจน์ย่อย

วิธีการหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบเมื่อทราบค่าความจริงประพจน์ย่อยเราจะใช้แผนภาพในการหา เพื่อความสะดวก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6 กำหนดให้ประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง q มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ r มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

$$(1) [p \wedge (p \rightarrow q)] \leftrightarrow \sim p \qquad (2) [(p \wedge q) \vee r] \rightarrow (p \wedge \sim r)$$

$$(3) [(p \wedge r) \rightarrow \sim q] \rightarrow [(q \wedge r) \wedge p] \qquad (4) [p \rightarrow (q \vee r)] \wedge [p \rightarrow (q \wedge r)]$$

$$(5) [(\sim p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim r] \rightarrow [(\sim p \wedge q) \leftrightarrow \sim r] \qquad (6) [p \rightarrow (q \wedge r)] \vee [p \leftrightarrow (q \wedge r)]$$



ตัวอย่าง 7 กำหนดให้ประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

$$(1) [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \rightarrow (p \vee q) \quad (2) [(\sim p \rightarrow q) \vee r] \vee [(\sim p \leftrightarrow \sim q) \wedge \sim r]$$

ตัวอย่าง 8 กำหนดให้ประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (s \rightarrow r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
จงหาค่าความจริงของประพจน์ p, q, r และ s

ตัวอย่าง 9 กำหนดให้ประพจน์ $[(p \leftrightarrow q) \vee (q \rightarrow r)] \vee \sim s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim r \rightarrow s)$

ตัวอย่าง 10 กำหนดให้ประพจน์ $[(r \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \wedge \sim p)$ มีค่าความจริงเป็นจริง
จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \rightarrow r)$



3.2 การหาค่าความจริงเมื่อไม่กำหนดค่าความจริงของประพจน์ย่อย

การหาค่าความจริงของประพจน์ที่ยังไม่กำหนดค่าความจริงมาให้ เราสามารถสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบนั้นได้

โดยเราจะเรียกประพจน์ย่อยที่ยังไม่กำหนดค่าความจริง ว่า **ตัวแปรแทนประพจน์**

และเรียกประพจน์เชิงประกอบที่ประกอบด้วยตัวแปรแทนประพจน์ ว่า **รูปแบบของประพจน์**

การสร้างตารางค่าความจริง

ถ้ามีประพจน์ย่อยจำนวน n ประพจน์ การพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ย่อยต้องพิจารณาค่าความจริงทุกกรณี

จำนวนกรณีที่พิจารณา = 2^n กรณี

ตัวอย่างเช่น

- (1) ถ้ารูปแบบมีประพจน์ย่อยประพจน์เดียว
ตารางค่าความจริง มี 2 กรณี ดังนี้

| p | รูปแบบประพจน์ |
|---|---------------|
| T | |
| F | |

- (2) ถ้ารูปแบบมีประพจน์ย่อยประพจน์
2 ประพจน์ ตารางค่าความจริง มี
 $2^2 = 4$ กรณี ดังนี้

| p | q | รูปแบบประพจน์ |
|---|---|---------------|
| T | T | |
| T | F | |
| F | T | |
| F | F | |

- (3) ถ้ารูปแบบมีประพจน์ย่อยประพจน์ 3 ประพจน์
ตารางค่าความจริง มี $2^3 = 8$ กรณี ดังนี้

| p | q | r | รูปแบบประพจน์ |
|---|---|---|---------------|
| T | T | T | |
| T | T | F | |
| T | F | T | |
| T | F | F | |
| F | T | T | |
| F | T | F | |
| F | F | T | |
| F | F | F | |



ตัวอย่าง 11 จงสร้างตารางค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

| p | q | $p \rightarrow q$ | $p \wedge (p \rightarrow q)$ | $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|------------------------------|--|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

ข้อสังเกต เราจะหาค่าความจริงของประพจน์ที่วงเล็บในสุดก่อนแล้วค่อยออกมาเรื่อยๆ

ตัวอย่าง 12 จงสร้างตารางค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow \sim q$ | $\sim p \wedge q$ | $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ |
|---|---|----------|----------|------------------------|-------------------|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

ตัวอย่าง 13 จงสร้างตารางค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ $(p \vee \sim r) \wedge q$

| p | q | r | $(p \vee \sim r) \wedge q$ |
|---|---|---|----------------------------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |



ตัวอย่าง 14 จงหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้ เมื่อกำหนดค่าความจริงบางประพจน์ให้

- | | | | |
|------|---|--------------------------------------|-----------|
| (1) | $(p \wedge s) \rightarrow (q \wedge r)$ | เมื่อ p เป็นเท็จ | ตอบ |
| (2) | $(p \vee q) \wedge r$ | เมื่อ r เป็นเท็จ | ตอบ |
| (3) | $p \rightarrow (p \vee q)$ | เมื่อ q เป็นจริง | ตอบ |
| (4) | $p \rightarrow (q \vee r)$ | เมื่อ p เป็นเท็จ | ตอบ |
| (5) | $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \vee p)$ | เมื่อ $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ | ตอบ |
| (6) | $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)$ | เมื่อ $p \vee q$ เป็นเท็จ | ตอบ |
| (7) | $p \vee (q \rightarrow r)$ | เมื่อ q เป็นเท็จ | ตอบ |
| (8) | $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$ | เมื่อ p เป็นจริง และ r เป็นเท็จ | ตอบ |
| (9) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | เมื่อ r เป็นจริง | ตอบ |
| (10) | $p \wedge (q \rightarrow r)$ | เมื่อ p เป็นเท็จ | ตอบ |
| (11) | $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ | เมื่อ p เป็นจริง | ตอบ |
| (12) | $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ | เมื่อ q เป็นจริง | ตอบ |
| (13) | $p \rightarrow (q \wedge r)$ | เมื่อ p เป็นเท็จ | ตอบ |
| (14) | $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim p$ | เมื่อ p เป็นจริง | ตอบ |
| (15) | $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$ | เมื่อ p เป็นเท็จ | ตอบ |
| (16) | $p \leftrightarrow \sim q$ | เมื่อ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง | ตอบ |
| (17) | $\sim p \leftrightarrow q$ | เมื่อ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง | ตอบ |
| (18) | $\sim p \leftrightarrow \sim q$ | เมื่อ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง | ตอบ |
| (19) | $p \rightarrow q$ | เมื่อ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง | ตอบ |
| (20) | $\sim q \rightarrow \sim p$ | เมื่อ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง | ตอบ |



ตัวอย่าง 15 จงหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยในประพจน์เชิงประกอบที่กำหนดค่าความจริงให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

| ประพจน์เชิงประกอบ | | ค่าความจริงของประพจน์ย่อย ในประพจน์เชิงประกอบ | | | |
|---|-------------|--|---|---|---|
| ประพจน์ | ค่าความจริง | p | q | r | s |
| (1) $(p \wedge q) \rightarrow r$ | F | | | | |
| (2) $p \rightarrow (q \vee r)$ | F | | | | |
| (3) $(r \vee q) \rightarrow (q \vee s)$ | F | | | | |
| (4) $q \vee [(q \leftrightarrow r) \vee (r \rightarrow s)]$ | F | | | | |
| (5) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow p$ | F | | | | |
| (6) $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ | F | | | | |
| (7) $(r \rightarrow p) \wedge (s \wedge p)$ | T | | | | |
| (8) $(p \vee \sim q) \vee (r \rightarrow s)$ | F | | | | |
| (9) $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow (p \wedge s)$ | F | | | | |
| (10) $(p \wedge s) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ | F | | | | |

ตัวอย่าง 16 กำหนดให้ $\sim [\sim(p \wedge q) \vee (\sim r \rightarrow s)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ $[(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge p] \vee [(r \rightarrow s) \wedge q]$



ตัวอย่าง 17 จงสร้างตารางค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ ต่อไปนี้

(1) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$

| p | q | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

| p | q | | | |
|---|---|--|--|--|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

(3) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(4) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(5) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(6) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(7) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(8) $(\sim q \rightarrow p) \rightarrow q$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |



(9) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

| p | q | r | | | |
|---|---|---|--|--|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

ตัวอย่าง 18 กำหนดให้ p, q เป็นประพจน์ และ “ * ” กับ “ Δ ” เป็นตัวเชื่อมประพจน์
ที่มีค่าความจริงของการเชื่อมประพจน์กำหนดดังตารางนี้

| p | q | $p * q$ | $p \Delta q$ |
|---|---|---------|--------------|
| T | T | F | F |
| T | F | T | F |
| F | T | F | F |
| F | F | F | T |

(1) ถ้าประพจน์ $(p * q) \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $(p \Delta r) * \sim q$

(2) ถ้าประพจน์ $(p \vee \sim q) \Delta r$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของ $p \rightarrow (\sim r * q)$



4. รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน (Equivalent)

บทนิยาม รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน
คือ รูปแบบของประพจน์สองรูปแบบที่มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี

จากนิยาม รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกันสามารถใช้แทนกันได้

สัญลักษณ์ ของการสมมูลของรูปแบบประพจน์คือ “ \equiv ” กล่าวคือ
รูปแบบประพจน์ A สมมูลกับรูปแบบประพจน์ B เขียนแทนด้วย $A \equiv B$
แต่ถ้ารูปแบบประพจน์ A ไม่สมมูลกับรูปแบบประพจน์ B เขียนแทนด้วย $A \not\equiv B$

คุณสมบัติของการสมมูลของรูปแบบประพจน์

กำหนดให้ A, B และ C เป็นรูปแบบของประพจน์

- (1) การสะท้อน : $A \equiv A$
- (2) การสมมาตร : ถ้า $A \equiv B$ แล้ว $B \equiv A$
- (3) การถ่ายทอด : ถ้า $A \equiv B$ และ $B \equiv C$ แล้ว $A \equiv C$

บทนิยาม รูปแบบประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน
คือ รูปแบบของประพจน์สองรูปแบบที่มีค่าความจริงต่างกันทุกกรณี

จากนิยาม รูปแบบประพจน์ A เป็นนิเสธของ รูปแบบประพจน์ B
ก็ต่อเมื่อ ค่าความจริงของ A และ B ต่างกันทุกกรณี
ก็ต่อเมื่อ ค่าความจริงของ A และ $\sim B$ เหมือนกันทุกกรณี
ก็ต่อเมื่อ $A \equiv \sim B$

ดังนั้น A เป็นนิเสธของ B ก็ต่อเมื่อ A สมมูลกับ $\sim B$ ***

วิธีการตรวจสอบการสมมูลกันของรูปแบบประพจน์

(1) **สร้างตารางค่าความจริง** โดยตารางของรูปแบบประพจน์ทั้งสองในตารางเดียวกัน จากนั้นพิจารณาว่าแต่ละกรณีมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณีหรือไม่

ถ้าทุกกรณีมีค่าความจริงเหมือนกัน จะกล่าวว่า รูปแบบประพจน์ทั้งสองนั้นสมมูลกัน
ถ้ามีบางกรณีที่มีค่าความจริงต่างกัน จะกล่าวว่า รูปแบบประพจน์ทั้งสองนั้นไม่สมมูลกัน

(2) **ใช้รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน** โดยปรับรูปแบบประพจน์หนึ่งให้เหมือนกับอีกรูปแบบประพจน์หนึ่งโดยใช้รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกันที่ได้ผ่านการพิสูจน์แล้วว่าสมมูลกันจริง ซึ่งได้แก่



*** รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันที่สำคัญ ***

| | | | |
|-------|---|----------|---|
| E 1. | $\sim(\sim p)$ | \equiv | p |
| E 2. | $p \wedge q$ | \equiv | $q \wedge p$ |
| E 3. | $p \vee q$ | \equiv | $q \vee p$ |
| E 4. | $p \leftrightarrow q$ | \equiv | $q \leftrightarrow p$ |
| E 5. | $(p \wedge q) \wedge r$ | \equiv | $p \wedge (q \wedge r)$ |
| E 6. | $(p \vee q) \vee r$ | \equiv | $p \vee (q \vee r)$ |
| E 7. | $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ | \equiv | $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ |
| E 8. | $p \wedge (q \vee r)$ | \equiv | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
| | $(q \vee r) \wedge p$ | \equiv | $(q \wedge p) \vee (r \wedge p)$ |
| E 9. | $p \vee (q \wedge r)$ | \equiv | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
| | $(q \wedge r) \vee p$ | \equiv | $(q \vee p) \wedge (r \vee p)$ |
| E 10. | $p \rightarrow (q \wedge r)$ | \equiv | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ |
| | $p \rightarrow (q \vee r)$ | \equiv | $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ |
| E 11. | $(p \wedge q) \rightarrow r$ | \equiv | $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ |
| | $(p \vee q) \rightarrow r$ | \equiv | $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ |
| E 12. | $p \rightarrow q$ | \equiv | $\sim p \vee q \quad \equiv \quad \sim q \rightarrow \sim p$ |
| E 13. | $p \leftrightarrow q$ | \equiv | $\sim p \leftrightarrow \sim q \quad \equiv \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
| E 14. | $\sim(p \wedge q)$ | \equiv | $\sim p \vee \sim q$ |
| E 15. | $\sim(p \vee q)$ | \equiv | $\sim p \wedge \sim q$ |
| E 16. | $\sim(p \rightarrow q)$ | \equiv | $p \wedge \sim q$ |
| E 17. | $\sim(p \leftrightarrow q)$ | \equiv | $\sim p \leftrightarrow q \quad \equiv \quad p \leftrightarrow \sim q$ |
| E 18. | $p \wedge p$ | \equiv | p |
| E 19. | $p \vee p$ | \equiv | p |
| E 20. | $p \wedge T$ | \equiv | p |
| E 21. | $p \vee F$ | \equiv | p |
| E 22. | $T \rightarrow p$ | \equiv | p |
| E 23. | $p \rightarrow F$ | \equiv | $\sim p$ |
| E 24. | $p \leftrightarrow T$ | \equiv | p |
| E 25. | $p \leftrightarrow F$ | \equiv | $\sim p$ |



ตัวอย่าง 19 จงตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่กำหนดให้ว่า สมมูลกัน หรือ เป็นนิเสธกัน หรือ ไม่สมมูล และ ไม่เป็นนิเสธกัน โดยใช้ตารางค่าความจริง

(1) $p \rightarrow \sim q$ และ $q \rightarrow \sim p$

| p | q | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

(2) $\sim(p \wedge \sim q)$ และ $\sim p \vee q$

| p | q | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

(3) $p \leftrightarrow \sim q$ และ $\sim p \leftrightarrow q$

| p | q | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

(4) $p \wedge \sim q$ และ $p \rightarrow q$

| p | q | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

(5) $\sim p \wedge \sim q$ และ $p \vee \sim q$

| p | q | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

(6) $\sim p \rightarrow q$ และ $\sim p \vee q$

| p | q | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

ตัวอย่าง 20 จงเติมประพจน์ในช่องว่างทำให้รูปแบบประพจน์ที่กำหนดให้สมมูลกัน

(1) $p \wedge \sim q \equiv \sim q \wedge \dots$

(2) $\sim p \vee q \equiv \dots \vee q$

(3) $\sim p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow \dots$

(4) $p \rightarrow \sim q \equiv \dots \vee \dots$

(5) $\sim p \rightarrow q \equiv \dots \vee \dots$

(6) $\sim p \rightarrow \sim q \equiv \dots \vee \dots$

(7) $p \vee q \equiv \dots \rightarrow p$

(8) $p \vee q \equiv \dots \rightarrow q$

(9) $p \leftrightarrow \sim q \equiv \sim(\sim p \leftrightarrow \dots)$

(10) $\sim p \leftrightarrow \sim q \equiv \sim(\sim p \leftrightarrow \dots)$



ตัวอย่าง 21 จงตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่กำหนดให้ว่า สมมูลกัน หรือ เป็นนิเสธกัน หรือ ไม่สมมูล และ ไม่เป็นนิเสธกัน โดยใช้รูปแบบการสมมูล (E 1 – E 25)

(1) $\sim(\sim p \wedge q)$ และ $p \vee \sim q$

(2) $\sim(p \vee \sim q)$ และ $\sim p \wedge q$

(3) $\sim p \rightarrow q$ และ $p \vee q$

(4) $\sim p \leftrightarrow q$ และ $p \leftrightarrow q$

(5) $p \rightarrow \sim q$ และ $p \wedge q$

(6) $\sim p \vee q$ และ $q \rightarrow p$

(7) $(p \wedge q) \rightarrow r$ และ $\sim p \vee (\sim q \vee r)$

(8) $(p \wedge q) \rightarrow r$ และ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(9) $(p \vee q) \rightarrow r$ และ $\sim p \wedge (\sim q \vee r)$

(10) $p \wedge \sim(q \rightarrow r)$ และ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(11) $\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r$ และ $p \wedge \sim(q \vee r)$

(12) $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim r$ และ $r \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

(13) $[\sim(p \wedge q)] \rightarrow (p \wedge \sim q)$ และ p

(14) $\sim p \wedge (r \wedge \sim r)$ และ $\sim p$



ตัวอย่าง 22 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

(1) $p \rightarrow q$

(2) $p \wedge q$

(3) $p \vee q$

(4) $p \leftrightarrow q$

(5) $(p \vee q) \rightarrow r$

(6) $p \rightarrow (q \vee r)$

ตัวอย่าง 23 จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

(1) π เป็นจำนวนอตรรกยะและมีค่ามากกว่า 3

(2) ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว a เป็นจำนวนคู่หรือเป็นจำนวนคี่

(3) $a > b$ ก็ต่อเมื่อ $a - b > 0$

(4) ถ้า $A \subset B$ และ $A \neq B$ แล้ว A เป็นสับเซตแท้

(5) \sqrt{a} เป็นจำนวนจริง เมื่อ $a \geq 0$

ตัวอย่าง 24 จงหาข้อความที่สมมูลกับข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $xy = 0$ และ $x \neq 0$ แล้ว $y = 0$

(2) ถ้า $x^2 = 2$ แล้ว $x = -2$ หรือ $x = 2$

(3) $X \in P(A)$ ก็ต่อเมื่อ $X \subset P(A)$



ตัวอย่าง 25 กำหนดข้อความ A และ B ในแต่ละข้อต่อไปนี้

จงพิจารณาว่าข้อความสมมูลกัน หรือ เป็นนิเสธกัน หรือไม่

- (1) A : ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่
B : ถ้า a^2 ไม่เป็นจำนวนคู่ แล้ว a ไม่เป็นจำนวนคู่
- (2) A : ถ้า $ab < 0$ แล้ว $a < 0$ หรือ $b < 0$
B : $ab < 0$ และ $a \geq 0$ และ $b \geq 0$
- (3) A : ถ้า c เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว c เป็นจำนวนคี่
B : c เป็นจำนวนคี่ หรือ c ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
- (4) A : $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ก็ต่อเมื่อ \sqrt{a} หาค่าได้
B : (ถ้า \sqrt{a} หาค่าไม่ได้ แล้ว $a \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$) และ
(\sqrt{a} หาค่าไม่ได้ หรือ $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$)
- (5) A : ถ้า a เป็นจำนวนนับแล้ว a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่
B : (ถ้า a เป็นจำนวนนับแล้ว a เป็นจำนวนคู่) หรือ
(ถ้า a เป็นจำนวนนับแล้ว a เป็นจำนวนเฉพาะ)
- (6) A : ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = 0$ หรือ $y = 0$
B : ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว $xy \neq 0$



5. สัจนิรันดร์ (Tautology)

จากการหาค่าความจริงของรูปแบบประพจน์โดยใช้ตารางค่าความจริงบางครั้งเราจะพบว่าในทุกกรณีมีค่าความจริงเป็นจริง ในหัวข้อนี้เราสนใจจะตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ว่ารูปแบบใดมีลักษณะเช่นนี้

สัจนิรันดร์ คือ รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

วิธีการตรวจสอบความเป็นสัจนิรันดร์

วิธีที่ 1 : สร้างตารางค่าความจริง

เป็นวิธีที่สามารถใช้ได้ทุกรูปแบบของประพจน์

วิธีที่ 2 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับการสมมูล ดังนี้

กำหนดให้ T แทนรูปแบบประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

 F แทนรูปแบบประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

 A แทนประพจน์ใด ๆ

$A \vee \sim A \equiv T$ ดังนั้น $A \vee \sim A$ เป็นสัจนิรันดร์

$A \vee T \equiv T$ ดังนั้น ถ้า B เป็นจริง T แล้ว $A \vee B$ เป็นสัจนิรันดร์

$A \rightarrow T \equiv T$ ดังนั้น ถ้า B เป็นจริง T แล้ว $A \rightarrow B$ เป็นสัจนิรันดร์

$F \rightarrow A \equiv T$ ดังนั้น ถ้า A เป็นจริง F แล้ว $A \rightarrow B$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีที่ 3 : ใช้วิธีสัด แยกตามลักษณะของการเชื่อมในรูปแบบของประพจน์

1. รูปแบบของประพจน์ที่อยู่ในรูป $A \vee B$

ใช้วิธีหาข้อขัดแย้ง โดยสมมติให้ รูปแบบประพจน์ $A \vee B$ เป็นเท็จ

นั่นคือ A มีค่าความจริงเป็น F และ B มีค่าความจริงเป็น F

แล้วหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยในรูปแบบประพจน์ $A \vee B$

- ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อยสอดคล้องกันโดย ไม่มีข้อขัดแย้ง *

แสดงว่ารูปแบบประพจน์ $A \vee B$ มีโอกาสเป็นเท็จได้

ดังนั้น $A \vee B$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ *

- ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อยไม่สอดคล้องกันโดย มีข้อขัดแย้ง *

แสดงว่ารูปแบบประพจน์ $A \vee B$ ไม่มีโอกาสเป็นเท็จได้ (เป็นจริงเสมอ)

ดังนั้น $A \vee B$ เป็นสัจนิรันดร์ *



2. รูปแบบของประพจน์ที่อยู่ในรูป $A \rightarrow B$

ใช้วิธีหาข้อขัดแย้ง โดยสมมติให้ รูปแบบประพจน์ $A \rightarrow B$ เป็นเท็จ

นั่นคือ A มีค่าความจริงเป็น T และ B มีค่าความจริงเป็น F

แล้วหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยในรูปแบบประพจน์ $A \rightarrow B$

- ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อยสอดคล้องกันโดย ไม่มีข้อขัดแย้ง *
แสดงว่ารูปแบบประพจน์ $A \rightarrow B$ มีโอกาสเป็นเท็จได้
ดังนั้น $A \rightarrow B$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ *
- ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อยไม่สอดคล้องกันโดย มีข้อขัดแย้ง *
แสดงว่ารูปแบบประพจน์ $A \rightarrow B$ ไม่มีโอกาสเป็นเท็จได้ (เป็นจริงเสมอ)
ดังนั้น $A \rightarrow B$ เป็นสัจนิรันดร์ *

3. รูปแบบของประพจน์ที่อยู่ในรูป $A \leftrightarrow B$

3.1 ใช้วิธีหาข้อขัดแย้ง โดยสมมติให้ รูปแบบประพจน์ $A \leftrightarrow B$ เป็นเท็จ

นั่นคือ กรณีที่ 1 A มีค่าความจริงเป็น T และ B มีค่าความจริงเป็น F

กรณีที่ 2 A มีค่าความจริงเป็น F และ B มีค่าความจริงเป็น T

ในแต่ละกรณีหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยในรูปแบบประพจน์ $A \leftrightarrow B$

- ถ้าทั้ง 2 กรณี มีบางกรณีที่มีค่าความจริงของประพจน์ย่อยสอดคล้องกัน
โดย ไม่มีข้อขัดแย้ง *
แสดงว่ารูปแบบประพจน์ $A \leftrightarrow B$ มีโอกาสเป็นเท็จได้
ดังนั้น $A \leftrightarrow B$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ *
- ถ้าทั้ง 2 กรณี แต่ละกรณีมีค่าความจริงของประพจน์ย่อยไม่สอดคล้องกัน
โดย มีข้อขัดแย้ง *
แสดงว่ารูปแบบประพจน์ $A \leftrightarrow B$ ไม่มีโอกาสเป็นเท็จได้ (เป็นจริงเสมอ)
ดังนั้น $A \leftrightarrow B$ เป็นสัจนิรันดร์ *

3.2 ใช้การสมมูลกัน โดยตรวจสอบว่าประพจน์ A และ B สมมูลกันหรือไม่

ถ้า $A \equiv B$ แล้ว $A \leftrightarrow B$ เป็นสัจนิรันดร์

ถ้า $A \not\equiv B$ แล้ว $A \leftrightarrow B$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์



ตัวอย่าง 26 จงตรวจสอบรูปแบบประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่
โดยใช้การสร้างตารางค่าความจริง

(1) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(2) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(3) $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(4) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

| p | q | |
|---|---|--|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(5) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

| p | q | r | |
|---|---|---|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |



ตัวอย่าง 27 จงตรวจสอบรูปแบบประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

(1) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \rightarrow r)$

(2) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim p \vee q$

(3) $(p \leftrightarrow r) \rightarrow (\sim q \vee q)$

(4) $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$

(5) $p \vee (\sim q \rightarrow \sim p)$

(6) $p \rightarrow [q \rightarrow (r \vee \sim r)]$

(7) $(p \vee \sim p) \rightarrow q$

(8) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

(9) $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(10) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

(11) $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \rightarrow \sim p)$

(12) $\sim(p \rightarrow q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(13) $[p \rightarrow (q \vee r)] \vee [q \leftrightarrow (p \wedge r)]$

(14) $[p \rightarrow (q \vee r)] \vee [p \rightarrow (q \wedge r)]$

(15) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

(16) $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee r]$