เลขยกกำลัง

math center

25 Jul 2016

สารบัญ

รากที่ n 1
ค่าหลักรากที่ n 2
การ บวก ลบ คูณ หาร รูท 7
รูทสองของจำนวนที่ติดรูท 16
เลขยกกำลัง 19
สมการเลขชี้กำลัง 26
อสมการเลขชี้กำลัง 33

รากที่ n

รากที่ n ของ x คือ จำนวนที่ยกกำลัง n แล้วได้ x

เช่น รากที่ 2 ของ 16 → อะไร $^2 = 16$ → 4 กับ -4

รากที่ 2 ของ -16 → อะไร $^2 = -16$ → ไม่มี (รากที่ 2 ของ -16 หาค่าไม่ได้)

รากที่ 3 ของ 8 → อะไร $^3 = 8$ → 2

รากที่ 3 ของ -8 → อะไร $^3 = -8$ → -2

สรุป

รากที่คู่ ของจำนวนบวก	→ มีสองจำนวน (บวกกับลบ)
รากที่คู่ ของจำนวนลบ	→ หาค่าไม่ได้
รากที่คี่ ของจำนวนบวก	→ มีจำนวนเดียว และเป็นบวก
รากที่คี่ ของจำนวนลบ	→ มีจำนวนเดียว และเป็นลบ

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง
   1. รากที่ 2 ของ 64 คือ ....
   2. รากที่ 9 ของ 1 คือ ....
   3. รากที่ 4 ของ -16 คือ ....
   4. รากที่ 3 ของ -1 คือ ....
   5. รากที่ 2 ของ 25 คือ ....
   6. รากที่ 4 ของ 1 คือ ....
   7. รากที่ 5 ของ -1 คือ ....
   8. รากที่ 2 ของ -1 คือ ....
   9. จำนวนที่ยกกำลัง 2 ได้ 16 คือ ....
   10. จำนวนที่ยกกำลัง 3 ได้ 8 คือ ....
   11. จำนวนที่ยกกำลัง 4 ได้ -1 คือ ....
   12. จำนวนที่ยกกำลัง 5 ได้ -32 คือ ....

2. ถ้า $(p-2)^2 = 25$ และ $(q+1)^2 = 81$ แล้ว ค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $p - 2q$ เท่ากับเท่าใด
   [O-NET 54/26]

ค่าหลักรากที่ n

หัวข้อนี้ คล้ายหัวข้อที่แล้ว ต่างกันแค่มีคำว่า "ค่าหลัก" โผล่มา

จากหัวข้อที่แล้ว รากที่คู่ของจำนวนบวก จะมีสองจำนวน (บวกกับลบ) เราจะเรียกรากที่เป็นบวกว่าราก "ค่าหลัก"

เช่น รากที่สองของ 16 คือ 4 และ -4

แต่ "ค่าหลักรากที่สอง" ของ 16 คือ 4 แค่จำนวนเดียว

ส่วนรากที่คี่ จะมีจำนวนเดียวอยู่แล้ว จำนวนนั้นเลยได้เป็น "ค่าหลัก" โดยอัตโนมัติ

เช่น รากที่สามของ 8 คือ 2 รากที่สามของ -8 คือ -2

ค่าหลักรากที่สามของ 8 ก็คือ 2 ค่าหลักรากที่สามของ -8 ก็คือ -2

"ค่าหลักรากที่ n" จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[n]{}$ (อ่านกว่า "กรณฑ์อันดับที่ n" หรือ "รูทที่ n")

ในกรณีที่ $n = 2$ มักจะละ n ไว้ในฐานที่เข้าใจ เช่น $\sqrt{16}$ จะหมายถึง $\sqrt[2]{16}$ นั่นเอง

เช่น $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{-16} =$ หาค่าไม่ได้

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{-8} = -2$

$\sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

ตัวอย่างที่แสดง ตัวเลขไม่เยอะ ทำให้คิดง่าย แต่ถ้าตัวเลขมากๆ ก็ต้องใช้อีกวิธี

เมื่อ x มีค่าเยอะๆ ถ้าจะหา $\sqrt[n]{x}$ เรามักจะใช้วิธีแยกตัวประกอบ x โดยการตั้งหารสั้นไปเรื่อยๆ

- ถ้าตัวประกอบซ้ำครบ n ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ได้ 1 ตัว
- ถ้าตัวประกอบที่ซ้ำไม่ถึง n ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ไม่ได้ ต้องติดอยู่ในเครื่องหมายราก

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt[3]{1728}$

วิธีทำ เอา 1728 มาแยกตัวประกอบโดยตั้งหารสั้นไปเรื่อยๆ

ข้อนี้ หารากที่ 3 ดังนั้น ตัวประกอบซ้ำ 3 ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ 1 ตัว

ได้ 2 หนึ่งตัว
2) 1728
2) 864
2) 432

ได้ 2 อีกตัว
2) 216
2) 108
2) 54

ได้ 3 อีกตัว
3) 27
3) 9
3

จะได้คำตอบคือ $2 \times 2 \times 3 = 12$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\sqrt{588}$

<u>วิธีทำ</u> เอา 588 มาแยกตัวประกอบโดยตั้งหารสั้นไปเรื่อยๆ

ตัวประกอบซ้ำ 2 ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ 1 ตัว

$$\begin{array}{r} \text{ได้ 2 หนึ่งตัว} \left\{ \begin{array}{r} 2\,\underline{)\,588} \\ 2\,\underline{)\,294} \end{array} \right. \\ 3\,\underline{)\,147} \\ \text{ได้ 7 หนึ่งตัว} \left\{ \begin{array}{r} 7\,\underline{)\,49} \\ \underline{7} \end{array} \right. \end{array}$$

จะเห็นว่า 2 กับ 7 มีซ้ำครบคู่ แต่ 3 ซ้ำไม่ครบสองตัว ดังนั้น คำตอบคือ $2 \times 7 \times \sqrt{3} = 14\sqrt{3}$ #

หมายเหตุ: ถ้าเห็นตัวเลขอยู่หน้ารูท แปลว่ามันกำลัง “คูณ” กับรูทอยู่

กล่าวคือ $14\sqrt{3} = 14 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times 14$

แต่ $14\sqrt{3}$ ไม่เหมือนกับ $\sqrt[14]{3}$ นะ

14 คูณรากที่สองของ 3 ค่าหลักรากที่ 14 ของ 3

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\sqrt[3]{-500}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ถามรากที่คี่ของจำนวนลบ จะยังพอหาได้ (แต่ถ้าถามรากที่คู่ของจำนวนลบ จะหาไม่ได้)

จากหัวข้อที่แล้ว รากที่คี่ของจำนวนลบ จะได้คำตอบเป็นจำนวนลบ

ดังนั้น วิธีทำคือ เราจะทำโดยไม่สนใจเครื่องหมายลบ แต่ตอนสุดท้าย เราจะเติมเครื่องหมายลบเค้าไปก่อนตอบ

ข้อนี้หารากที่ 3 นั่นคือ ตัวประกอบซ้ำ 2 ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ 1 ตัว

$$\begin{array}{r} 2\,\underline{)\,500} \\ 2\,\underline{)\,250} \\ \text{ได้ 5 หนึ่งตัว} \left\{ \begin{array}{r} 5\,\underline{)\,125} \\ 5\,\underline{)\,25} \\ \underline{5} \end{array} \right. \end{array}$$

จะเห็นว่า 2 ได้ไม่ครบสามตัว ดังนั้น ได้ตัวเลขคำตอบ คือ $5\sqrt[3]{2 \times 2} = 5\sqrt[3]{4}$

แต่เนื่องจากรากที่คี่ของจำนวนลบ ต้องได้จำนวนลบ ดังนั้น คำตอบคือ $-5\sqrt[3]{4}$ #

จะเห็นว่า ต้องจับคู่ครบ n ตัว จึงจะสามารถโยนออกมานอก $\sqrt[n]{}$ ได้ 1 ตัว

ทำนองกลับกัน ถ้าเราจะหดตัวนอก $\sqrt[n]{}$ กลับเข้าไปข้างใน จะต้องแตกซ้ำ n ตัว

เช่น $2\sqrt{3} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = \sqrt{12}$ $\quad 3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 5} = \sqrt[3]{135}$

$2\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[4]{32}$ $\quad \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{6}{2 \times 2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

ตัวอย่าง จงเรียงลำดับจำนวนต่อไปนี้ จากมากไปหาน้อย $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$

วิธีทำ ข้อนี้ มีทั้งตัวเลขหน้ารูทและหลังรูท ทำให้เปรียบเทียบยาก

ดังนั้น เราจะหดตัวเลขหน้ารูท กลับเข้าไปอยู่หลังรูท ดังนี้

$$3\sqrt{5} = \sqrt{3\times 3\times 5} = \sqrt{45}$$
$$4\sqrt{3} = \sqrt{4\times 4\times 3} = \sqrt{48}$$
$$5\sqrt{2} = \sqrt{5\times 5\times 2} = \sqrt{50}$$

เนื่องจาก $\sqrt{45} < \sqrt{48} < \sqrt{50}$ ดังนั้น $3\sqrt{5} < 4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$ #

ถ้าต้องการดึง "ตัวแปร" ออกมาจาก $\sqrt[n]{\ }$ ก็ยังใช้วิธีเดิม คือ ตัวแปรซ้ำครบ n ตัว ดึงออกมาเป็น 1 ตัว

สิ่งที่ต้องระวัง คือ ในกรณีที่ n เป็นเลขคู่ ผลลัพธ์จะเป็นลบไม่ได้

ดังนั้น เราต้องใส่เครื่องหมาย ค่าสัมบูรณ์ เพื่อให้ผลลัพธ์เป็นบวกเสมอ

เช่น $\sqrt{a^7} = |a^3|\sqrt{a}$ $\qquad \sqrt{\frac{12x^3y^5}{z^4}} = \frac{2|x|y^2}{z^2}\sqrt{3xy}$

$\sqrt{x^2} = |x|$ $\qquad \sqrt[4]{x^{12}y^{15}z^{16}} = |x^3y^3|(z^4)\left(\sqrt[4]{y^3}\right)$

ไม่ต้องเอา z^4 ไว้ในค่าสัมบูรณ์ก็ได้
เพราะ z^4 เป็นบวกตลอดอยู่แล้ว

แต่ถ้า n เป็นเลขคี่ ก็ทำเหมือนปกติ ไม่มีอะไรต้องระวัง

เช่น $\sqrt[3]{a^4} = a\sqrt[3]{a}$ $\qquad \sqrt[3]{a^6b^5} = a^2b\sqrt[3]{b^2}$

$\sqrt[5]{a^{13}b^{15}} = a^2b^3\sqrt[5]{a^3}$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{a^7b^{12}}{c^3}} = \frac{a^2b^4}{c}\cdot\sqrt[3]{a}$

หมายเหตุ: คนส่วนใหญ่มักคิดว่า $\sqrt{x^2} = x$ ซึ่งจะถูกเฉพาะเมื่อ x เป็นบวกหรือศูนย์เท่านั้น

ประโยคที่ถูกต้องจริงๆ คือ $\sqrt{x^2} = |x|$ ตามที่แสดงในตัวอย่างข้างต้น

แบบฝึกหัด

1. ข้อใดถูกต้อง
   1. $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$
   2. $\sqrt[4]{(-4)^4} = -4$
   3. $\sqrt[5]{-2}$ หาค่าไม่ได้
   4. $\sqrt{x^2} = x$
   5. $\sqrt{x^2} = x$ เมื่อ $x \geq 0$
   6. $\sqrt{x^4} = x^2$

2. จงหาผลสำเร็จของค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1. $\sqrt[4]{81}$
   2. $\sqrt[3]{216}$

3. $\sqrt[5]{-243}$

4. $\sqrt[3]{-432}$

5. $\sqrt{1764}$

6. $\sqrt[3]{10125}$

7. $\sqrt{(-17)^2}$

8. $\sqrt{a^{10}b^4}$

9. $\sqrt{\frac{8x^5y^6}{z^7}}$

10. $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}$

3. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนคู่บวก ข้อใดถูกต้องบ้าง [O-NET 53/9]

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = |a|$
2. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

4. $\left(\left|4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\right| - \left|3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}\right| + \left|4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}\right|\right)^2$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 53/8]

การ บวก ลบ คูณ หาร รูท

จำนวนที่ติดรูท จะบวกลบกันได้ เมื่อส่วนที่เป็นรูทของทั้งสองตัว เหมือนกัน

เช่น $2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$ บวกกันได้ เพราะส่วนที่เป็นรูทเท่ากัน เท่ากับ $\sqrt{5}$

$2\sqrt{5}+4\sqrt{2}$ บวกกันไม่ได้ เพราะตัวแรกเป็น $\sqrt{5}$ แต่ตัวหลังเป็น $\sqrt{2}$

$2\sqrt{5}-3\sqrt[3]{5}$ ลบกันไม่ได้ เพราะตัวตั้งเป็น $\sqrt{5}$ แต่ตัวลบเป็น $\sqrt[3]{5}$

ในกรณีที่บวกลบกันได้ ผลลัพธ์จะได้จากการเอาตัวเลขหน้ารูทมาบวกลบกัน (ถ้าไม่มีตัวเลขหน้ารูท ให้ถือว่าเป็น 1)

เช่น $2\sqrt{5}+3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

$2\sqrt{2}-\sqrt{2} = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{2}+\sqrt{3} =$ รวมกันไม่ได้ $= \sqrt{2}+\sqrt{3}$

$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2} = 4\sqrt{2}+\sqrt{3}$

ในกรณีที่บวกลบกันไม่ได้ ให้ลองพยายามจัดรูปดูก่อน โดยจะมีวิธีจัดคือ

- หดตัวเลขเข้าออกรูท

  เช่น $\sqrt{8} = \sqrt{2\times2\times2} = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{18} = \sqrt{2\times3\times3} = 3\sqrt{2}$

  $\sqrt{50} = \sqrt{2\times5\times5} = 5\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{12} = \sqrt{2\times2\times3} = 2\sqrt{3}$ เป็นต้น

- $\sqrt[n]{(\ \ )^m}$ $\rightarrow$ คูณหรือหาร m และ n ด้วยตัวเลขที่เท่ากันได้ (เหมือนตัดเศษส่วน)

  เช่น $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2}$ $\qquad$ $\sqrt[8]{5^6} = \sqrt[4]{5^3}$

  $\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

  $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^8}$ เป็นต้น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt[4]{4}$

วิธีทำ ดูเผินๆ ข้อนี้เหมือนรวมกันไม่ได้ แต่ถ้าดูดีๆ จะพบว่า

$$\sqrt{8} = \sqrt{2\times2\times2} = 2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{18} = \sqrt{2\times3\times3} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt[4]{4} &= 2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}\\ &= (2+3-1)\sqrt{2}\\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

#

สำหรับการคูณจำนวนติดรูท จะคูณกันได้เมื่อ "อันดับของรูทเท่ากัน"

เช่น $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}$ คูณกันได้เลย เพราะเป็นรากอันดับที่ 2 เหมือนกัน

$2\sqrt{5}\times4\sqrt[3]{2}$ ตัวแรกเป็นรากที่สอง แต่ตัวหลังเป็นรากที่สาม ยังคูณกันไม่ได้ (ต้องจัดรูปให้อันดับรูทเท่ากันก่อน)

ในกรณีที่อันดับรูทเท่ากัน ให้เอาตัวนอกรูทคูณตัวนอกรูท และ ตัวในรูทคูณตัวในรูท

ถ้าตัวในรูท คูณกันแล้วเกิด ซ้ำมากพอ ก็จับกลุ่มดึงออกไปนอกรูทได้

เช่น $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{10}$

$2\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 6\sqrt{2 \times 6} = 6\sqrt{2 \times 2 \times 3} = 12\sqrt{3}$

$(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} = 3$

$(\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 4$

ถ้าอันดับรูทไม่เท่ากัน ให้ลองแปลง $\sqrt[n]{(\ \ )^m}$ โดย คูณหรือหาร m กับ n ด้วยตัวเลขที่เท่ากันก่อน

เช่น $\sqrt{2} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \times \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{72}$ เป็นต้น

ถ้าตัวที่คูณกัน มีการบวกกันอยู่ด้วย ให้เราใช้วิธีกระจาย เหมือนตอนคูณพหุนาม

เช่น $(2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3 \times 3}$

$= 8 + 2\sqrt{3} - 3 \quad = 5 + 2\sqrt{3}$

$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 + \sqrt{6} + \sqrt{6} + 2$

$= 5 + 2\sqrt{6}$

$(5 + 2\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2}) = 25 - 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2 \times 2}$

$= 25 - 8 \quad = 17$

สำหรับการหารจำนวนติดรูท ให้ทำเหมือนคูณ คือ ตัวหน้ารูท ก็หารกับตัวหน้ารูท ส่วนตัวในรูท ก็หารกับตัวในรูท

เช่น $\frac{8\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$

$\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$3\sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{3}$

$\frac{6\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{15}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$

แต่ในเรื่องการหาร จะมีสิ่งที่ต้องทำเพิ่มคือ ต้องจัดรูปผลลัพธ์ให้ "ตัวส่วนไม่ติดรูท"
เพราะตัวติดรูท มักจะเป็นตัวเลขไม่ลงตัว ถ้าเป็นตัวส่วน จะคิดเลขลำบากกว่าเป็นเศษ
วิธีจัดรูป ให้คูณอะไรสักอย่าง ให้รูทที่ตัวส่วนหายไป โดยต้องคูณทั้งเศษและส่วน เพื่อไม่ให้ค่าเปลี่ยน ดังนี้

- คูณด้วย "ตัวที่ขาด" โดยเมื่อคูณแล้ว ตัวส่วนจะซ้ำครบคู่ และดึงออกไปนอกรูทได้

  เช่น $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

  $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

  $\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(5)(3)} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

- คูณด้วย "คอนจูเกต" ในกรณีที่ตัวส่วน เป็น $\sqrt{}$ บวกหรือลบ กับจำนวนอื่น ให้

  หมายเหตุ : "คอนจูเกต" หรือ "สังยุค" คือ จำนวนที่เครื่องหมายตรงกลางเปลี่ยนเป็นตรงข้าม

  เช่น คอนจูเกตของ $5+2\sqrt{2}$ คือ $5-2\sqrt{2}$

  คอนจูเกตของ $\sqrt{3}-4$ คือ $\sqrt{3}+4$ เป็นต้น

  การคูณด้วยคอนจูเกต จะทำให้เข้าสูตร $(\text{น}-\text{ล})(\text{น}+\text{ล}) = \text{น}^2-\text{ล}^2$ ทำให้ $\sqrt{}$ หายไปได้

  เช่น $\frac{2}{\sqrt{6}-2} = \frac{2}{\sqrt{6}-2}\times\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2}$

  $= \frac{(2)(\sqrt{6}+2)}{6-4}$

  $= \sqrt{6}+2$

  $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

  $= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+3}{2-3}$

  $= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+3}{-1}$

  $= -\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-3$

- คูณด้วยตัวอื่นๆ ที่เข้าสูตร ผลบวก - ผลต่าง กำลัง n

  เช่น ในกรณีที่ตัวส่วน เป็น $\sqrt[3]{}$ บวกหรือลบ กับจำนวนอื่น จะต้องให้คูณด้วย $(\text{น}^2 \pm \text{นล} + \text{ล}^2)$

  เพื่อเข้าสูตร $(\text{น}-\text{ล})(\text{น}^2+\text{นล}+\text{ล}^2) = \text{น}^3-\text{ล}^3$

  $(\text{น}+\text{ล})(\text{น}^2-\text{นล}+\text{ล}^2) = \text{น}^3+\text{ล}^3$

  เช่น $\frac{2}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}$

  $= \frac{(2)\left(2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{2^3-\sqrt[3]{2^3}}$

  $= \frac{(2)\left(4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}{6} \quad = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $\sqrt{2} = 1.414$ จงหาค่าประมาณของ $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ แทน $\sqrt{2}$ ลงไปตรงๆ จะได้ $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3(1.414)} = \frac{2}{4.242}$ → หารเลขลำบาก เพราะส่วนเป็นตัวเลขไม่สวย

เราจะจัดรูปให้ส่วนไม่ติดรูทก่อน จะได้ $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(3)(2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

แทน $\sqrt{2} = 1.414$ จะได้ $\frac{1.414}{3} = 0.471$ → จะเห็นว่าคิดเลขง่ายกว่าเยอะเลย #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ตัวส่วนมี 3 ตัว เราจะค่อยๆกำจัด $\sqrt{}$ โดยค่อยๆคูณด้วยคอนจูเกตทีละเปลาะ

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3-5}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \quad = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

#

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาผลบวกและผลลบของจำนวนต่อไปนี้

   1. $3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$
   2. $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$
   3. $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{2}$
   4. $\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{3}}$
   5. $\sqrt{50} - \sqrt[4]{4} + \sqrt{\frac{9}{2}}$
   6. $2\sqrt{x^3} - x\sqrt{x} - x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$

2. จงหาผลคูณของจำนวนต่อไปนี้

   1. $\sqrt{6} \times \sqrt{2}$
   2. $3\sqrt{2} \times \sqrt{8}$
   3. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$
   4. $\sqrt[3]{-2} \times 3\sqrt[3]{4}$
   5. $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$
   6. $\sqrt[4]{9} \times \sqrt{5}$

7. $\sqrt[5]{3} \times \sqrt{2}$

8. $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

9. $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$

10. $(1 - \sqrt{2})^2$

11. $(\sqrt{3} - 1)^2$

12. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดรูท

1. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

2. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$

6. $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{10}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}$

7. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

8. $\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

9. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

10. $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{7}}$

4. กำหนดให้ $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$ และ $\sqrt{5}=2.236$ จงหาค่าประมาณของ จำนวนต่อไปนี้ ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 2

1. $\sqrt{8}-\sqrt{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}$

3. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

4. $(\sqrt{5}-2)^{-1}$

5. ถ้า $a=-5$ และ $b=8$ แล้ว $\sqrt[6]{a^2b}\,\sqrt[6]{a^4b}$ มีค่าเท่าใด [O-NET 59/4]

6. $(\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32})^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1]

7. $\sqrt{18}+2\sqrt[3]{-125}-3\sqrt[4]{4}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/3]

8. ค่าของ $\frac{1}{(1-\sqrt{3})^2}$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [O-NET 56/4]

1. $[1.5, 1.6)$
2. $[1.6, 1.7)$
3. $[1.7, 1.8)$
4. $[1.8, 1.9)$
5. $[1.9, 2.0)$

9. $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/1]

10. $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}-1} \div \frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{3}}$ มีค่าเท่ากับข้อใด [O-NET 56/5]

1. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $-\sqrt{2}$
4. $\sqrt{2}$
5. $\frac{1}{2}$

11. ถ้า $x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ และ $y=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ แล้ว $x^2-4xy+y^2$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 54/23]

12. ถ้า $a=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ แล้ว $\sqrt{a+\frac{1}{a}-2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/4]

13. ถ้า $a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ แล้ว $a^2 + \frac{1}{a^2}$ มีค่าเท่าใด [O-NET 58/8]

14. $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| - \left|2 - \sqrt{2}\right|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [O-NET 50/1]

1. $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}$
3. $\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$
4. $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{2}$

15. $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 \left(2 + \sqrt{8}\right)^2 \left(1 + \sqrt{2}\right)^3 \left(2 - \sqrt{8}\right)^3$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/3]

รูทสองของจำนวนที่ติดรูท

ในหัวข้อนี้ จะเรียนเรื่องการหารูท ของจำนวนที่ติดรูท โดยจะพูดถึงการหารูทสอง ของจำนวนในรูป $x \pm 2\sqrt{y}$

เนื่องจาก $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = (a+b)+2\sqrt{ab}$ ดังนั้น $\sqrt{\underbrace{(a+b)}_{\text{บวกกัน ได้ } x}+2\sqrt{\underbrace{ab}_{\text{คูณกัน ได้ } y}}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

ดังนั้น ถ้าจะหา $\sqrt{x+2\sqrt{y}}$ วิธีง่ายๆ คือ ให้หาตัวเลขสองตัวที่ "บวกกันได้ x คูณกันได้ y"
แล้วเอาสองตัวนั้นมาใส่รูท บวกกัน ตอบได้ทันที

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\sqrt{17+2\sqrt{72}}$

<u>วิธีทำ</u> ต้องลองหาว่าอะไรบวกกันได้ 17 คูณกันได้ 72 ลองสุ่มหาดูซักพัก จะได้ 9 กับ 8
ดังนั้น คำตอบคือ $\sqrt{9}+\sqrt{8} = 3+2\sqrt{2}$ #

ในกรณีที่เครื่องหมายตรงกลางเป็นลบ ก็ทำเหมือนเดิม และตอบคำตอบในรูป $\sqrt{\text{ตัวมาก}}-\sqrt{\text{ตัวน้อย}}$
เนื่องจาก $\sqrt{}$ จะให้ผลลัพธ์เป็นบวกเท่านั้น จึงต้องเอาตัวมากขึ้นก่อนเสมอ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

<u>วิธีทำ</u> หาว่าอะไรบวกกันได้ 4 คูณกันได้ 3 ลองสุ่มดูซักพัก จะได้ 1 กับ 3
แต่ 3 มากกว่า 1 ดังนั้น ต้องตอบโดยเอา 3 ขึ้นก่อน
ดังนั้น คำตอบคือ $\sqrt{3}-\sqrt{1}=\sqrt{3}-1$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหารากที่สองของ $11-2\sqrt{24}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เหมือนกันกับคำถามว่า $\sqrt{11-2\sqrt{24}}$ เท่ากับเท่าไหร่นั่นเอง
เพียงแต่ถ้าถาม "รากที่สอง" แบบนี้ ต้องตอบสองค่า คือค่าบวกกับค่าลบ
หาว่าอะไรบวกกันได้ 11 คูณกันได้ 24 ลองสุ่มดูซักพัก จะได้ 8 กับ 3 โดยจะได้ 8 เป็นตัวมาก
ดังนั้น คำตอบคือ $\pm\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)=\pm\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า มี 6 คูณอยู่หน้า $\sqrt{3}$ แต่ตามสูตร จะต้องมี 2 คูณอยู่หน้า $\sqrt{}$
ดังนั้น ยังทำไม่ได้ ต้องจัดรูปก่อน $12+6\sqrt{3} = 12+(2)(3)\sqrt{3} = 12+2\sqrt{27}$
หด 3 เข้าไปในรูท กลายเป็น 9

ดังนั้น ข้อนี้ เราต้องหาว่าอะไรบวกกันได้ 12 คูณกันได้ 27 ซึ่งจะได้ 9 กับ 3
ดังนั้น คำตอบคือ $\sqrt{9}+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$ #

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

วิธีทำ จะเห็นว่าข้อนี้ไม่มีเลข 2 อยู่หน้า $\sqrt{15}$ แต่ตามสูตรมันต้องมีเลข 2 หน้า $\sqrt{15}$ ถึงจะตรงกับรูปแบบของเรา

ดังนั้น ยังทำไม่ได้ ต้องจัดรูปก่อน วิธีจัดคือ เราจะคูณ $\frac{2}{2}$ เข้าไปที่ $\sqrt{15}$ แล้วหด $\frac{1}{2}$ เข้าไป แต่คง 2 ข้างบนไว้

นั่นคือ $4-\sqrt{15}=4-\left(\frac{2}{2}\times\sqrt{15}\right)=4-2\sqrt{\frac{15}{2\times 2}}=4-2\sqrt{\frac{15}{4}}$

ดังนั้น ข้อนี้ เราต้องหาว่าอะไรบวกกันได้ 4 คูณกันได้ $\frac{15}{4}$ คราวนี้ยากหน่อย เพราะเป็นเศษส่วน

สุ่มดูชักพัก จะได้ $\frac{5}{2}$ กับ $\frac{3}{2}$ ดังนั้น คำตอบคือ $\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$

แต่บางคนก็ไม่ชอบให้มีตัวส่วนในรูท ก็ต้องจัดรูปต่อ

จะได้ $\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{2}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{2}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$ #

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลสำเร็จของค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1. $\sqrt{13+2\sqrt{30}}$
   2. $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
   3. $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$
   4. $\sqrt{13-4\sqrt{10}}$
   5. รากที่สองของ $8-4\sqrt{3}$
   6. รากที่สองของ $8+2\sqrt{7}$

7. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

8. $\sqrt{6-\sqrt{35}}$

9. รากที่สองของ $2-\sqrt{3}$

10. รากที่สองของ $6+3\sqrt{3}$

11. $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$

12. รากที่ 4 ของ $7+4\sqrt{3}$

2. จำนวนจริง $\sqrt{84+18\sqrt{3}}$ มีค่าเท่าใด [O-NET 59/3]

3. ค่าของ $\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{18}+\sqrt{12}$ อยู่ในช่วงใด [O-NET 58/7]

1. $(2.2\ ,\ 2.3)$
2. $(2.3\ ,\ 2.4)$
3. $(2.4\ ,\ 2.5)$
4. $(2.5\ ,\ 2.6)$
5. $(2.6\ ,\ 2.7)$

เลขยกกำลัง

หัวข้อนี้ จะเป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับเรื่องเลขยกกำลังที่เคยเรียนมาเมื่อตอน ม. ต้น
โดยเราจะได้เจอเลขชี้กำลังที่เป็นเศษส่วน ทศนิยม ด้วย แต่กฎเดิมก็ยังใช้ได้

- ฐานเหมือนกัน คูณกัน ให้เอาเลขชี้กำลังมาบวกกัน
  ฐานเหมือนกัน หารกัน ให้เอาเลขชี้กำลังมาลบกัน

  เช่น $2^5 \times 2^4 = 2^9$ $\quad$ $2^3 \times 2 = 2^4$

  $\frac{m^4}{m} = m^3$ $\quad$ $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}}$

  $3^{1.5} \times 3^{2.2} = 3^{3.7}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

  $a^2b \cdot ab^3 = a^3b^4$ $\quad$ $\frac{x^5yz}{xy^3} = \frac{x^4z}{y^2}$

- ยกกำลังซ้อน ให้เอาเลขชี้กำลังมาคูณกัน

  เช่น $(2^3)^4 = 2^{12}$ $\quad$ $((a^2)^3)^4 = a^{24}$

  $\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^6 = m^3$

- เลขยกกำลัง กระจายเข้าไปในคูณหารได้ แต่กระจายในบวกลบไม่ได้

  เช่น $(2 \times 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$ $\quad$ $(2 \cdot 3^2)^4 = 2^4 \cdot (3^2)^4 = 2^4 \cdot 3^8$

  $\left(a^2b^{\frac{1}{3}}\right)^6 = a^{12}b^2$ $\quad$ $\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^2 = \frac{a^4b^2}{c^6}$

  แต่ $(2+3)^4 \neq 2^4 + 3^4$

- ย้ายบนลงล่าง หรือล่างขึ้นบน เลขชี้กำลังจะเปลี่ยนเครื่องหมาย บวก → ลบ , ลบ → บวก

  เช่น $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ $\quad$ $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4$

  $a^{-2}b^3c^{-1} = \frac{b^3}{a^2c}$ $\quad$ $\frac{a^{-2}}{b^{-3}} = \frac{b^3}{a^2}$

  หมายเหตุ: ปกติเราจะไม่ชอบให้เลขชี้กำลังเป็นลบ ก่อนตอบจึงนิยมย้ายขึ้นลงให้เลขชี้กำลังเป็นบวกก่อนค่อยตอบ

- อะไรก็ตามยกกำลังศูนย์ จะได้ 1 เสมอ และ ศูนย์ยกกำลังอะไรก็ตาม จะได้ 0 เสมอ
  ยกเว้น 0^0 หาค่าไม่ได้

- ถ้า “เลขชี้กำลัง” เป็นเศษส่วน ให้เปลี่ยน “ส่วน” ของเลขชี้กำลังเป็น “รูท”
  ถ้า “เลขชี้กำลัง” เป็นทศนิยม ให้เปลี่ยนทศนิยมเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ แล้วเปลี่ยนตัวส่วนให้เป็นรูท

  เช่น $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2}$ $\quad$ $3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$

  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$ $\quad$ $25^{0.5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

จากสมบัติข้อหลังสุดนี่ จะเห็นว่า รูท ก็คือการยกกำลังแบบหนึ่ง นั่นคือ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ นั่นเอง
ตรงจุดนี้ จะทำให้ รูท มีสมบัติทุกอย่างของเรื่องเลขยกกำลัง
ตัวอย่างเช่น จากสมบัติที่ว่า "เลขยกกำลัง กระจายเข้าไปในคูณหารได้ แต่กระจายในบวกลบไม่ได้"
ถ้านำมาใช้กับรูท ก็เช่น $\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ และ $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
แต่ $\sqrt{x+2} \neq \sqrt{x} + \sqrt{2}$ เป็นต้น

อีกเรื่องที่โจทย์นิยมนำมาออกข้อสอบ คือ การเปรียบเทียบเลขยกกำลัง ว่าตัวไหนมาก ตัวไหนน้อย
หลักคือ เราต้องพยายามจัดรูปเลขยกกำลัง ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายที่สุด ให้ตัวเลขน้อยที่สุด ก่อน

- ถ้าเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน เรามักยกกำลังทั้งสองข้างด้วยเลขเยอะๆ ที่ตัดตัวส่วนทุกส่วนลงตัว (ค.ร.น.)
- ถ้าเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเยอะๆ เรามักยกกำลังทั้งสองข้างด้วยเศษส่วนที่ทอนเลขชี้กำลังให้ได้มากที่สุด (ห.ร.ม.)

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ หรือไม่
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ และ $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ ดังนั้น ข้อนี้ถามว่า $2^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{1}{3}}$ หรือไม่ นั่นเอง
เราจะปรับ $\frac{1}{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ ให้เป็นจำนวนเต็มง่ายๆก่อน โดยการยกกำลัง 6 ทั้งสองข้าง ($6 =$ ค.ร.น. ของ 2 กับ 3)

$$\begin{aligned} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 &> \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 \\ 2^3 &> 3^2 \\ 8 &> 9 \quad \rightarrow \text{ ไม่จริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ เป็นประโยคที่เป็นเท็จ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $2^{36} < 3^{24}$ หรือไม่
<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า 36 กับ 24 สามารถทอนให้น้อยลงได้ โดยยกกำลัง $\frac{1}{12}$ ทั้งสองข้าง ($12 =$ ห.ร.ม. ของ 36 กับ 24)

$$\begin{aligned} (2^{36})^{\frac{1}{12}} &< (3^{24})^{\frac{1}{12}} \\ 2^3 &< 3^2 \\ 8 &< 9 \quad \rightarrow \text{ จริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น $2^{36} < 3^{24}$ จริง #

อีกเรื่องที่ต้องระวัง คือ ยิ่งยกกำลังมาก ไม่ได้แปลว่าจะได้ผลลัพธ์มากขึ้นเสมอไป

เช่น $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ $\downarrow$ มากขึ้น $\qquad (0.8)^2 = 0.64$, $(0.8)^3 = 0.512$ $\downarrow$ น้อยลง

จะเห็นว่า ถ้า "ฐานน้อยกว่า 1" ยิ่งยกกำลังมาก กลับจะยิ่งได้ค่าน้อย

sin หรือ cos ของมุมบวกที่น้อยกว่า 90° จะน้อยกว่า 1 เสมอ

เช่น $0.5^5 > 0.5^9$	$3^{0.5} > 3^{0.2}$
$\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{15} \geq \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{20}$	$(\sin 60°)^6 < \sin 60°$
$(\sqrt{2})^5 > (\sqrt{2})^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$
$(0.2)^{0.5} < (0.2)^{0.4}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ข้อใดถูกต้อง

    1. $(-4)^{10} < 0$
    2. $(-1)^{\frac{2}{6}} > 0$
    3. $(-1)^{0} = 1$
    4. $1^{-5} = -1$

2. จงเติมเครื่องหมาย มากกว่า หรือ น้อยกว่า ให้ถูกต้อง

    1. 2^3 ...... 2^5
    2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ...... $\left(\frac{1}{2}\right)^5$
    3. $2^{\frac{1}{3}}$ ...... $2^{\frac{1}{5}}$
    4. $\left(\sqrt{2}\right)^3$ ...... $\left(\sqrt{2}\right)^5$
    5. $\left(\sqrt{3}\right)^{-3}$ ...... $\left(\sqrt{3}\right)^{-5}$
    6. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}$ ...... $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{1}{5}}$
    7. $\sqrt{0.5}$ ...... $(0.5)^4$
    8. $\sqrt[3]{1.5}$ ...... $\sqrt[5]{1.5}$
    9. $(0.2)^3 \cdot (0.2)^5$ ...... $(0.2)^4 \cdot (0.2)^6$
    10. $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}$ 2
    11. $\sqrt[6]{25}$ ...... $\sqrt[9]{1000}$
    12. $\sqrt[10]{16}$ ...... $\sqrt[15]{27}$

3. จงทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

    1. $3^{\frac{30}{60}}$
    2. $32^{\frac{2}{5}} + 64^{\frac{2}{3}}$
    3. $\left(2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}\right)^6$
    4. $125^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{25^{-1}}$

5. $(-8)^{\frac{1}{3}}$

6. $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}}$

7. $27 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

8. $8^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{4}}$

9. $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{ab}\right)^{-6}$

10. $\left(\frac{a^2b^3c^4}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a\sqrt{b}}{2^3x^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$

11. $\frac{5^{n+2}+5^{n+1}}{5^n}$

12. $\frac{3^n-3^{n-2}}{3^n-3^{n-1}}$

13. $\frac{3\cdot 2^{n+1}+2^n}{2^n-2^{n-1}}$

4. กำหนดให้ a และ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูก [O-NET 50/27]
   1. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a^x < 0$
   2. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a^{-x} < a$
   3. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^{-x} > 0$
   4. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^x > a$

5. $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}} \cdot \frac{(18)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/2]

6. $\frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}} + \frac{2^6}{(64)^{\frac{3}{2}}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-2]

7. ค่าของ $\sqrt{(-2)^2} + \left(\frac{8^{1/2}+2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 52/2]

8. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 58/5]
   1. $a^{\frac{1}{9}}$
   2. $a^{\frac{2}{9}}$
   3. $a^{\frac{4}{9}}$
   4. $a^{\frac{5}{9}}$
   5. $a^{\frac{7}{9}}$

9. ข้อใดมีค่าต่างจากข้ออื่น [O-NET 53/7]

1. $(-1)^0$　2. $(-1)^{0.2}$　3. $(-1)^{0.4}$　4. $(-1)^{0.8}$

10. ถ้า $x = 1+\sqrt{3}$ แล้ว $\frac{x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}}}{x}$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 59/6]

1. $1+\sqrt{3}$　2. $\left(1+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$　3. $\left(1+\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$

4. $\left(1+\sqrt{3}\right)^{-1}$　5. $\left(1+\sqrt{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$

11. ข้อใดต่อไปนี้ผิด [O-NET 51/22]

1. $(24)^{30} < 2^{20}\cdot 3^{30}\cdot 4^{40}$　2. $(24)^{30} < 2^{30}\cdot 3^{20}\cdot 4^{40}$

3. $2^{20}\cdot 3^{40}\cdot 4^{30} < (24)^{30}$　4. $2^{30}\cdot 3^{40}\cdot 4^{20} < (24)^{30}$

12. อสมการในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง [O-NET 49/1-18]

1. $2^{1000} < 3^{600} < 10^{300}$　2. $3^{600} < 2^{1000} < 10^{300}$

3. $3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$　4. $10^{300} < 2^{1000} < 3^{600}$

13. ให้ $A = 2^{5/6}$, $B = 3^{1/2}$ และ $C = 5^{1/3}$ จงเรียงลำดับ A, B, C จากน้อยไปมาก [O-NET 57/2]

14. ให้ $A = 2^{\frac{3}{2}}$, $B = 3^{\frac{2}{3}}$ และ $C = 216^{\frac{1}{6}}$ จงเรียงลำดับ A, B, C จากน้อยไปมาก [O-NET 58/6]

สมการเลขชี้กำลัง

หัวข้อนี้ จะพูดถึงสมการที่เอา x ไปใช้เป็นเลขชี้กำลัง

หลักในการแก้คือ ต้องจัดรูปสมการให้ "ฐานเท่ากัน" แล้วฉุดเลขชี้กำลังลงมาเท่ากัน

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $3^{x+1} = 9^{x-2}$

<u>วิธีทำ</u> ต้องทำฐานให้เท่ากันก่อน จะเห็นว่า ฝั่งซ้าย ฐาน $= 3$ ฝั่งขวา ฐาน $= 9$

ดังนั้น เราจะทำฐานฝั่งขวา จาก 9^{x-2} ให้เป็นฐาน 3

$$\begin{aligned} 3^{x+1} &= 9^{x-2} \\ 3^{x+1} &= (3^2)^{x-2} \\ 3^{x+1} &= 3^{(2)(x-2)} \\ 3^{x+1} &= 3^{2x-4} \\ x+1 &= 2x-4 \\ 5 &= x \end{aligned}$$

เมื่อฐานเท่ากัน จะฉุดเลขชี้กำลัง ลงมาเท่ากันได้

#

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $\left(\sqrt{8}\right)^{x+1} = 4^{x+1}$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า ฐานของทั้งสองฝั่ง สามารถแปลงให้เป็นฐาน 2 ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{8}\right)^{x+1} &= 4^{x+1} \\ \left(\sqrt{2^3}\right)^{x+1} &= (2^2)^{x+1} \\ \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{x+1} &= (2^2)^{x+1} \\ 2^{\left(\frac{3}{2}\right)(x+1)} &= 2^{(2)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{3}{2}\right)(x+1) &= (2)(x+1) \\ (3)(x+1) &= (4)(x+1) \\ 3x+3 &= 4x+4 \\ -1 &= x \end{aligned}$$

#

การเปลี่ยนฐาน จะยากขึ้นได้อีก เมื่อเลขชี้กำลังเป็นลบ

เพราะเมื่อเลขชี้กำลังเป็นลบ จะมีการกลับเศษส่วน ทำให้รูปฐานเปลี่ยนไป

เช่น $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{27}$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$

ดังนั้น $\frac{8}{27}$ สามารถเปลี่ยนเป็นฐาน $\frac{3}{2}$ ได้

และ $2+\sqrt{3}$ ก็สามารถเปลี่ยนเป็นฐาน $2-\sqrt{3}$ ได้ เป็นต้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $\left(\frac{8}{27}\right)^{x+4} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1}$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า ฐานของทั้งสองฝั่ง สามารถแปลงให้เป็นฐาน 2 กับ 3 ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{8}{27}\right)^{x+4} &= \left(\tfrac{9}{4}\right)^{x-1} \\ \left(\tfrac{2^3}{3^3}\right)^{x+4} &= \left(\tfrac{3^2}{2^2}\right)^{x-1} \\ \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^3\right)^{x+4} &= \left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right)^{x-1} \\ \left(\tfrac{2}{3}\right)^{(3)(x+4)} &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^{(2)(x-1)} \\ \left(\tfrac{2}{3}\right)^{(3)(x+4)} &= \left(\tfrac{2}{3}\right)^{-(2)(x-1)} \end{aligned}$$

กลับ เศษ - ส่วน เลขชี้กำลัง เปลี่ยนจาก บวก → ลบ

$$\begin{aligned} (3)(x+4) &= -(2)(x-1) \\ 3x+12 &= -2x+2 \\ 5x &= -10 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

#

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-2} = \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-6}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เริ่มจะดูยากว่าต้องเปลี่ยนเป็นฐานอะไร ถ้านึกไม่ออก ลองเอาฐานซักตัว มายกกำลัง -1 ดู

จะได้ $\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5}-2$ ซึ่งโชคดีได้เป็นฐานอีกตัวพอดี

ดังนั้น เราจะเปลี่ยน $\sqrt{5}-2$ ในสมการ ให้กลายเป็น $\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-2} &= \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-6} \\
\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-2} &= \left(\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}\right)^{x-6} \\
\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-2} &= \left(\sqrt{5}+2\right)^{(-1)(x-6)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x-2 &= (-1)(x-6) \\
x-2 &= -x+6 \\
2x &= 8 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

#

ในกรณีที่ในสมการมีมากกว่า 2 พจน์ เรามักต้องใช้ความรู้เรื่องการแก้สมการกำลังสองเข้ามาผสม ส่วนใหญ่ เรามักจะต้องหา “ตัวที่เป็นกำลังสองของอีกตัว” ให้จัดให้อยู่ในรูป $a(\ )^2 + b(\ ) + c = 0$ จากนั้น แยกตัวประกอบ จับแต่ละวงเล็บเป็นศูนย์ แล้วแก้สมการแต่ละวงเล็บ ก็จะได้คำตอบ

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 = 0$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ มี 3 พจน์ มาบวกลบกันอยู่ เราจะพยายามจัดรูปให้เป็นสมการกำลังสอง เพื่อแยกตัวประกอบ

จะเห็นว่า $5^{2x} = (5^x)^2$ ดังนั้น เราจัดรูปให้เป็น สมการกำลังสองได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 &= 0 \\
(5^x)^2 - 6(5^x) + 5 &= 0 \\
(5^x-1)(5^x-5) &= 0
\end{aligned}$$

มอง 5^x เป็นเหมือนตัวแปรตัวใหม่ เป็น $A^2 - 6A + 5 = 0$

$(A-1)(A-5) = 0$

$$\begin{aligned}
5^x - 1 &= 0 \\
5^x &= 1 \\
5^x &= 5^0 \\
x &= 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
5^x - 5 &= 0 \\
5^x &= 5 \\
5^x &= 5^1 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

จะได้คำตอบของสมการคือ 0 และ 1 #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $4^{x+1} + 7\cdot 2^x = 2$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้มี 4^x ที่สามารถทำเป็น $(2^2)^x$ แล้วกลายเป็น $(2^x)^2$ ได้

แต่ก่อนอื่น เราต้องแยก 4^{x+1} ออกเป็น $4^x\cdot 4^1$ ก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned}
4^{x+1} + 7\cdot 2^x &= 2 \\
4^{x+1} + 7\cdot 2^x - 2 &= 0 \\
4^x\cdot 4^1 + 7\cdot 2^x - 2 &= 0 \\
(2^2)^x\cdot 4 + 7\cdot 2^x - 2 &= 0 \\
(2^x)^2\cdot 4 + 7\cdot 2^x - 2 &= 0 \\
4(2^x)^2 + 7(2^x) - 2 &= 0 \\
(4\cdot 2^x - 1)(2^x+2) &= 0
\end{aligned}$$

มอง 2^x เป็นเหมือนตัวแปรตัวใหม่ เป็น $4A^2 + 7A - 2 = 0$

$(4A-1)(A+2) = 0$

$$\begin{aligned}
4\cdot 2^x - 1 &= 0 \\
2^2\cdot 2^x &= 1 \\
2^{x+2} &= 2^0 \\
x+2 &= 0 \\
x &= -2
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
2^x + 2 &= 0 \\
2^x &= -2
\end{aligned}$$

(ไม่มีคำตอบ)

จะได้คำตอบของสมการคือ -2 #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $2^{x+2} = 4^{x-5}$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} = \frac{1}{16^{x+1}}$

3. $25^x = \sqrt{5}$

4. $\sqrt{2}^5 = 4^{\frac{1}{x}+3}$

5. $\sqrt{3^{x^2-1}} = 9^{x-1}$

6. $8^{-x} = \frac{1}{32}$

7. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x+5} = 1$

8. $3^x = 2^x$

9. $\frac{4^x}{9^x} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

10. $\frac{5^{x+1}}{3^{2x}} = \frac{9^5}{25^2}$

11. $\frac{5^{x+3}}{2^{x+2}} = \frac{16}{125}$

12. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

13. $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$

14. $2^{x+1} - 2^x = 64$

15. $3^x + 3^{x-1} = 108$

16. $2^{2x} + 4^{x-1} + 64^{\frac{x}{3}} = 576$

2. ถ้า $4^{a} = \sqrt{2}$ และ $16^{-b} = \frac{1}{4}$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/2-2]

3. ถ้า $64^{k} = 16$ แล้ว $8^{k} + 8^{-k}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/8]

4. ถ้า $2^{x-1} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 56/7]

5. ถ้า $\left(\sqrt{\frac{8}{27}}\right)^{4} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{x}}$ และ $y = 3x$ แล้ว y เท่ากับเท่าใด [O-NET 54/24]

6. ถ้า $\left(\sqrt{\frac{8}{125}}\right)^4 = \left(\frac{16}{625}\right)^{\frac{1}{x}}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/2]

7. ถ้า $\left(3+\frac{3}{8}\right)^{3x} = \frac{16}{81}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/5]

8. ถ้า $A = \left\{ x \;\middle|\; 9^{x^2} = \left(1+\sqrt[3]{8}\right)^x \right\}$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน A มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/7]

9. ค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{2}^{x^2} = \frac{2^{4x}}{4^4}$ เท่ากับข้อใด [O-NET 49/1-13]

10. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $2^{x^2} = 16$ และ $-3 \leq y \leq x$ แล้ว ค่าที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ของ xy เท่ากับเท่าใด [O-NET 58/35]

11. ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $(4^x)^{2x-1} = \frac{(16)^4}{2^{2x}}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 59/35]

12. ถ้า $8^x - 8^{x+1} + 8^{x+2} = 228$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/21]

อสมการเลขชี้กำลัง

คราวนี้เป็น "อ" สมการ นั่นคือ ในสมการจะมีเครื่องหมายอื่นๆที่ไม่ใช่ $=$ ซึ่งได้แก่ $>, <, \geq, \leq, \neq$
วิธีทำยังคล้ายๆเดิม คือ ต้องจัดรูปสมการให้ "ฐานเท่ากัน" แล้วจุดเลขชี้กำลังลงมาคิด

และเนื่องจาก ในหัวข้อก่อนหน้า จะเห็นว่า ถ้า "ฐานน้อยกว่า 1" ยิ่งยกกำลังมาก กลับจะยิ่งได้ค่าน้อย
ดังนั้น ตอนจุดเลขชี้กำลังลงมา ถ้า ฐานน้อยกว่า 1 ต้องเปลี่ยน "มากกว่า" เป็น "น้อยกว่า"
"น้อยกว่า" เป็น "มากกว่า" ด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ฐานคือ $\frac{1}{2}$ ซึ่งน้อยกว่า 1 ดังนั้น ตอนดึงเลขชี้กำลังลงมา ต้องกลับเครื่องหมาย $\leq$ เป็น $\geq$

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x+1} &\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3} \\ x+1 &\geq 3 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

ฐาน คือ $\frac{1}{2}$ ซึ่งน้อยกว่า 1 ดังนั้นตอนจุดกำลังลงมา ต้องเปลี่ยนน้อยกว่าเป็นมากกว่า

ดังนั้น คำตอบของอสมการนี้ คือ $[\,2\,,\infty\,)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $\left(\sqrt{3}\right)^{x-4} > \left(\sqrt{3}\right)^{3x}$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ฐานคือ $\sqrt{3}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 1.732 ซึ่งมากกว่า 1
ดังนั้น ตอนดึงเลขชี้กำลังลงมา <u>ไม่</u>ต้องกลับเครื่องหมาย

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3}\right)^{x-4} &> \left(\sqrt{3}\right)^{3x} \\ x-4 &> 3x \\ -4 &> 2x \\ -2 &> x \end{aligned}$$

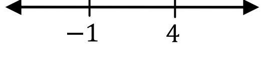
ฐาน คือ $\sqrt{3}$ ซึ่งมากกว่า 1 ดังนั้นตอนจุดกำลังลงมา <u>ไม่</u>ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย

ดังนั้น คำตอบของอสมการนี้ คือ $(-\infty, -2)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x^2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x}$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ต้องทำฐานทั้ง 2 ข้างให้เท่ากันก่อน จะเห็นว่า $\frac{3}{2}$ ก็คือ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ นั่นเอง

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{4-x^2} &< \left(\tfrac{2}{3}\right)^{3x} \\ \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{4-x^2} &< \left(\tfrac{2}{3}\right)^{3x} \\ \left(\tfrac{2}{3}\right)^{(-1)(4-x^2)} &< \left(\tfrac{2}{3}\right)^{3x} \\ (-1)(4-x^2) &> 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)(4-x^2) &> 3x \\ -4+x^2 &> 3x \\ x^2-3x-4 &> 0 \\ (x-4)(x+1) &> 0 \end{aligned}$$



ดังนั้น คำตอบของอสมการนี้ คือ $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้อสมการต่อไปนี้

1. $2^x < 4$

2. $3^{2x+1} > \sqrt{3}$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{16}$

4. $\left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^5$

5. $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} < 3^{x-1}$

6. $\left(\frac{1}{8}\right)^{3-x} \geq 4^{5x-1}$

7. $3^{x^2+x} > 9^{3x-3}$

8. $0.8 < (0.8)^{x^2}$

9. $(0.09)^{x^2+3x} > (0.3)^{x+3}$

10. $2^{x-2} \geq \frac{1}{4^{x^2+x}}$

2. ข้อใดต่อไปนี้ ผิด [O-NET 50/23]

1. $\sqrt{0.9+10} < \sqrt{0.9} + \sqrt{10}$
2. $\left(\sqrt{0.9}\right)\left(\sqrt[4]{0.9}\right) < 0.9$
3. $\left(\sqrt{0.9}\right)\left(\sqrt[3]{1.1}\right) < \left(\sqrt{1.1}\right)\left(\sqrt[3]{0.9}\right)$
4. $\sqrt[300]{125} < \sqrt[200]{100}$

3. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $4^{2x^2-4x-5} \le \frac{1}{32}$ [O-NET 50/28]

รากที่ n

1. 1. $8, -8$ 2. 1 3. ไม่มี 4. -1
   5. $5, -5$ 6. $1, -1$ 7. -1 8. ไม่มี
   9. $4, -4$ 10. 2 11. ไม่มี 12. -2
2. 27

ค่าหลักรากที่ n

1. $1, 5, 6$
2. 1. 3 2. 6 3. -3 4. $-6\sqrt[3]{2}$
   5. 42 6. $15\sqrt[3]{3}$ 7. 17 8. $|a^5|b^2$
   9. $\frac{2x^2|y^3|}{|z^3|}\sqrt{\frac{2x}{z}}$ 10. x
3. $1, 2$ 4. 0

การ บวก ลบ คูณ หาร รูท

1. 1. $8\sqrt{5}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $2\sqrt{2}$ 4. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
   5. $\frac{11\sqrt{2}}{2}$ 6. 0
2. 1. $2\sqrt{3}$ 2. 12 3. 3 4. -6
   5. $\sqrt[6]{108}$ 6. $\sqrt{15}$ 7. $\sqrt[10]{288}$ 8. $2+\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$
   9. -1 10. $3-2\sqrt{2}$ 11. $4-2\sqrt{3}$ 12. $30+12\sqrt{6}$
3. 1. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ 2. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4. $\sqrt{3}-1$
   5. $\frac{1}{6}$ 6. $\sqrt{2}$ 7. $7-4\sqrt{3}$ 8. $3\sqrt{6}-6$
   9. 6 10. $\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}$
4. 1. 2.121 2. 6.928 3. 2.121 4. 4.236
5. 10 6. 200 7. -10 8. 4
9. 0.3 10. 2 11. 94 12. 4
13. 98 14. 4 15. -32

รูทสองของจำนวนที่ติดรูท

1. 1. $\sqrt{10}+\sqrt{3}$ 2. $\sqrt{5}-1$ 3. $\sqrt{5}-2$ 4. $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$
   5. $\pm(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 6. $\pm(\sqrt{7}+1)$ 7. $2-\sqrt{3}$ 8. $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$
   9. $\pm\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$ 10. $\pm\left(\frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}}{2}\right)$

11. $\sqrt{2}-1$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} &= \sqrt{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{17-2\sqrt{72}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{8}} \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}-\sqrt{1} \\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

12. $\pm\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$

2. $9+\sqrt{3}$ 3. 2

เลขยกกำลัง

1. 3
2. 1. $<$ 2. $>$ 3. $>$ 4. $<$
   5. $>$ 6. $<$ 7. $>$ 8. $>$
   9. $>$ 10. $<$ 11. $<$ 12. $>$
3. 1. $\sqrt{3}$ 2. 20 3. 108 4. 625
   5. -2 6. $5^{\frac{5}{6}}$ 7. $3^{\frac{10}{3}}$ 8. $4\sqrt{2}$
   9. a^3b^4 10 $\frac{8bc^2}{x}$ 11. 30 12. $\frac{4}{3}$
   13. 14
4. 3 5. 2 6. $-\frac{13}{24}$ 7. 3
8. 3 9. 2 10. 5 11. 3
12. 3 13. $C<B<A$ 14. $B<C<A$

สมการเลขชี้กำลัง

1. 1. 12 2. $-1, 4$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{4}{7}$
   5. $1, 3$ 6. $\frac{5}{3}$ 7. $-\frac{5}{2}$ 8. 0
   9. $\frac{1}{4}$ 10. -5 11. -6 12. $0, 2$
   13. $1, -1$ 14. 6 15. 4 16. 4
2. 0.75 3. $\frac{17}{4}$ 4. $-\frac{3}{2}$ 5. 2
6. $\frac{2}{3}$ 7. $-\frac{4}{9}$ 8. 0.5 9. 4
10. 6 11. 2 12. $\frac{2}{3}$

อสมการเลขชี้กำลัง

1.
   1. $x < 2$
   2. $x > -\frac{1}{4}$
   3. $x \leq 4$
   4. $x \geq 1$
   5. $x > \frac{1}{5}$
   6. $x \leq -1$
   7. $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$
   8. $x \in (-1, 1)$
   9. $x \in \left(-3, \frac{1}{2}\right)$
   10. $x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$
2. 2
3. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$