ยนรู้ที่ 1

และอนุกรม

ยนรู้

- ได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก
- ลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
- ลบวกอนุกรมอนันต์
- จและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้

บันคนวัยทำงานส่วนใหญ่จะตั้งเป้าหมายในชีวิต
บ้าน ซื้อคอนโดมิเนียม หรือซื้อรถยนต์เป็นของ
ซึ่งการซื้อสิ่งเหล่านี้จำเป็นต้องใช้เงินจำนวนมาก
อาจเลือกที่จะออมเงินไว้ส่วนหนึ่งและกู้เงินกับ
อีกส่วนหนึ่ง

คารจะพิจารณาฐานเงินเดือนของผู้กู้เพื่อคำนวณ
งินที่จะผ่อนชำระในแต่ละเดือน ซึ่งเงินที่ผ่อนชำระ
ะเดือนนั้นจะประกอบด้วยเงินต้นและดอกเบี้ย
นาคารกำหนด

นักเรียนจะนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรม
มาช่วยในการคำนวณเงินที่ผ่อนชำระในแต่ละเดือน
ได้อย่างไร


ก่อนที่เราจะศึกษาความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรม
เราไปทบทวนความรู้ที่นำมาใช้ในเรื่องลำดับและอนุกรม
กันก่อนเลยค่ะ

ปของจำนวน เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนหนึ่งชุด แต่ละจำนวนจะมีลักษณะสำคัญบ
ร่วมกัน ซึ่งต้องใช้การสังเกต การวิเคราะห์ หาเหตุผลมาสนับสนุน เพื่อหาลักษ
ที่สำคัญ แล้วหาบทสรุปอธิบายความสัมพันธ์นั้น เช่น

12, ... เป็นแบบรูปของจำนวนที่มีความสัมพันธ์ โดยเพิ่มขึ้นทีละ 3 หรือพหุคูณของ 3 เขียนแสดงความสัมพันธ์

านวนในลำดับที่ 1 เท่ากับ 3 เกิดจาก 3×1

านวนในลำดับที่ 2 เท่ากับ 6 เกิดจาก 3×2

านวนในลำดับที่ 3 เท่ากับ 9 เกิดจาก 3×3

านวนในลำดับที่ 4 เท่ากับ 12 เกิดจาก 3×4

ถเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างลำดับที่กับจำนวนในลำดับที่ของแบบรูปของจำนวน 3, 6, 9, 12, ... ได้เป็น 3n
แทนจำนวนนับใด ๆ

ชัน คือ เซตของคู่อันดับ ซึ่งคู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตั
ต้องเหมือนกัน

ของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมด เรียกว่า **โดเมน** ของฟังก์ชัน เขียนแทนด้วย D_f

ของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมด เรียกว่า **เรนจ์** ของฟังก์ชัน เขียนแทนด้วย R_f

$f(x) = 4x - 1$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า $f(-1) = -5, f(0) = -1, f(1) = 3, \ldots$

ดังนั้น $D_f = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ และ $R_f = \{\ldots, -5, -1, 3, \ldots\}$

ต่อไปเราจะได้ศึกษาเรื่องราวเกี่ยวกับ
ลำดับและอนุกรมว่ามีอะไรบ้าง

นักเรียนพร้อมหรือยังคะ ?

ถ้าพร้อมแล้วไปกันเลย !!!

ความหมายของลำดับ

นักเรียนยังจำความหมายของลำดับได้ไหมคะ ?

เราไปทบทวนความหมายของลำดับกัน

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ลำดับจำกัด คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของ $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ เขียนแทนด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ลำดับอนันต์ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เขียนแทนด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots$

ความหมายของลำดับ

จากความหมายของลำดับ เราจะเรียก a_n ว่า **พจน์ทั่วไปของลำดับ**

ซึ่งลำดับสามารถแบ่งได้เป็นลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต

เรามาเริ่มศึกษาลำดับเลขคณิตกันก่อนเลยนะคะ

ลำดับเลขคณิต

ให้นักเรียนลองสังเกตลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ผลต่างของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับ
ในแต่ละข้อเป็นอย่างไร

1) $1, 3, 5, 7, 9$
2) $4, 9, 14, 19, 24$
3) $12, 8, 4, 0, -4$
4) $3, 3, 3, 3, 3$
5) $1, 4, 9, 16, 25$

ลำดับเลขคณิต

จากลำดับข้อ 1) $1, 3, 5, 7, 9$ จะได้ว่า $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7$ และ $a_5 = 9$

ซึ่ง

$$a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$
$$a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$$
$$a_4 - a_3 = 7 - 5 = 2$$
$$a_5 - a_4 = 9 - 7 = 2$$

จะเห็นว่า ผลต่างของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าเท่ากัน

ลำดับเลขคณิต

จากลำดับข้อ 2) $4, 9, 14, 19, 24$ จะได้ว่า $a_1 = 4, a_2 = 9, a_3 = 14, a_4 = 19$ และ $a_5 =$

ซึ่ง

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= 9 - 4 &&= 5 \\
a_3 - a_2 &= 14 - 9 &&= 5 \\
a_4 - a_3 &= 19 - 14 &&= 5 \\
a_5 - a_4 &= 24 - 19 &&= 5
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า ผลต่างของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าเท่ากัน

ลำดับเลขคณิต

จากลำดับข้อ 3) $12, 8, 4, 0, -4$ จะได้ว่า $a_1 = 12, a_2 = 8, a_3 = 4, a_4 = 0$ และ $a_5 = -$

ซึ่ง
$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 8 - 12 &= -4 \\ a_3 - a_2 &= 4 - 8 &= -4 \\ a_4 - a_3 &= 0 - 4 &= -4 \\ a_5 - a_4 &= -4 - 0 &= -4 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ผลต่างของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าเท่ากัน

ลำดับเลขคณิต

จากลำดับข้อ 4) $3, 3, 3, 3, 3$ จะได้ว่า $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 3$ และ $a_5 = 3$

ซึ่ง

$$a_2 - a_1 = 3 - 3 = 0$$

$$a_3 - a_2 = 3 - 3 = 0$$

$$a_4 - a_3 = 3 - 3 = 0$$

$$a_5 - a_4 = 3 - 3 = 0$$

จะเห็นว่า ผลต่างของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าเท่ากัน

ลำดับเลขคณิต

จากลำดับข้อ 5) $1, 4, 9, 16, 25$ จะได้ว่า $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16$ และ $a_5 = 2$

ซึ่ง

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= 4 - 1 &= 3 \\
a_3 - a_2 &= 9 - 4 &= 5 \\
a_4 - a_3 &= 16 - 9 &= 7 \\
a_5 - a_4 &= 25 - 16 &= 9
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า ผลต่างของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าไม่เท่ากัน

ลำดับเลขคณิต

จากลำดับทั้ง 5 ข้อ สรุปได้ว่า ลำดับในข้อ 1) - 4) มีผลต่างของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับเท่ากัน

แต่ลำดับในข้อ 5) มีผลต่างของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับไม่เท่ากัน

ซึ่งเราเรียกลำดับในข้อ 1) - 4) ว่า ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิตสอดคล้องกับบทนิยามต่อไปนี้

นิยาม

บเลขคณิต คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม**

จน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

a_1 คือ พจน์ที่ 1 ของลำดับเลขคณิต

n คือ ลำดับที่ n ของลำดับเลขคณิต

d คือ ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต โดยที่ $d = a_{n+1} - a_n$ สำหรับ $n \in I^+$

a_n คือ พจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต

ไปศึกษาตัวอย่างเกี่ยวกับลำดับเลขคณิตพร้อม ๆ กันเลยค่ะ

ย่างที่ 1 กำหนดสองพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ 17 และ 25 ให้หาพจน์ที่ 100 ของลำดั

จากโจทย์ $a_1 = 17$ และ $a_2 = 25$ จะได้ $d = 25 - 17 = 8$

และจาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้
$$\begin{aligned} a_{100} &= 17 + (100-1)(8) \\ &= 17 + 792 \\ &= 809 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 100 ของลำดับนี้เท่ากับ 809

ย่างที่ 2 จำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 1 ถึง 1,400 ที่หารด้วย 15 ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน

ก จำนวนนับจำนวนแรกที่อยู่ระหว่าง 1 ถึง 1,400 ที่หารด้วย 15 ลงตัว คือ 15
และจำนวนนับจำนวนสุดท้ายที่อยู่ระหว่าง 1 ถึง 1,400 ที่หารด้วย 15 ลงตัว คือ 1,395
เมื่อนำจำนวนนับที่หารด้วย 15 ลงตัว มาเขียนเรียงเป็นลำดับจากน้อยไปมาก
จะได้ $15, 30, 45, \ldots, 1395$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ 15

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้
$$\begin{aligned} 1{,}395 &= 15 + (n-1)(15) \\ 1{,}395 &= 15n \\ n &= 93 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 1 ถึง 1,400 ที่หารด้วย 15 ลงตัว มีทั้งหมด 93 จำนวน

ลำดับเรขาคณิต

ต่อไปเราจะศึกษาลำดับเรขาคณิตกันค่ะ

ให้นักเรียนลองสังเกตลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

อัตราส่วนของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับในแต่ละข้อเป็นอย่างไร

1) $1, 2, 4, 8, 16$

2) $3, -9, 27, -81, 243$

3) $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \frac{1}{324}$

4) $5, 5, 5, 5, 5$

5) $2, 4, 12, 48, 240$

ลำดับเรขาคณิต

จากลำดับข้อ 1) $1, 2, 4, 8, 16$ จะได้ว่า $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$ และ $a_5 = 16$

ซึ่ง $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$ $\quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2$

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{4} = 2$ $\quad \frac{a_5}{a_4} = \frac{16}{8} = 2$

จะเห็นว่า อัตราส่วนของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าเท่ากัน

ลำดับเรขาคณิต

ลำดับข้อ 2) $3, -9, 27, -81, 243$ จะได้ว่า $a_1 = 3, a_2 = -9, a_3 = 27, a_4 = -81$ และ a_5

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-9}{3} = -3 \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{27}{-9} = -3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-81}{27} = -3 \qquad \frac{a_5}{a_4} = \frac{243}{-81} = -3$$

เห็นว่า อัตราส่วนของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าเท่ากัน

ลำดับเรขาคณิต

ลำดับข้อ 3) $\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{36},\frac{1}{108},\frac{1}{324}$ จะได้ว่า $a_1=\frac{1}{4}, a_2=\frac{1}{12}, a_3=\frac{1}{36}, a_4=\frac{1}{108}$ และ $a_5 =$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3} \qquad \frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{\frac{1}{108}}{\frac{1}{36}}=\frac{1}{3} \qquad \frac{a_5}{a_4}=\frac{\frac{1}{324}}{\frac{1}{108}}=\frac{1}{3}$$

ห็นว่า อัตราส่วนของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าเท่ากัน

ลำดับข้อ 4) $5, 5, 5, 5, 5$ จะได้ว่า $a_1 = 5, a_2 = 5, a_3 = 5, a_4 = 5$ และ $a_5 = 5$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{5} = 1 \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{5}{5} = 1 \qquad \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{5} = 1$$

ห็นว่า อัตราส่วนของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าเท่ากัน

ลำดับข้อ 5) $2, 4, 12, 48, 240$ จะได้ว่า $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 12, a_4 = 48$ และ $a_5 = 2$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{48}{12} = 4 \qquad \frac{a_5}{a_4} = \frac{240}{48} = 5$$

ห็นว่า อัตราส่วนของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับมีค่าไม่เท่ากัน

ลำดับเรขาคณิต

จากลำดับทั้ง 5 ข้อ สรุปได้ว่า ลำดับในข้อ 1) - 4)
มีอัตราส่วนของสองพจน์ที่อยู่ติดกันของลำดับเท่ากัน

แต่ลำดับในข้อ 5) มีอัตราส่วนของสองพจน์ที่อยู่ติดกัน
ของลำดับไม่เท่ากัน

ซึ่งเราเรียกลำดับในข้อ 1) - 4) ว่า ลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิตสอดคล้องกับบทนิยามต่อไปนี้

นิยาม

ดับเรขาคณิต คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า **อัตราส่วน**

ซึ่งพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

เมื่อ a_1 คือ พจน์ที่ 1 ของลำดับเรขาคณิต

n คือ ลำดับที่ n ของลำดับเรขาคณิต

r คือ อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต โดยที่ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ สำหรับ $n \in I^+$

และ a_n คือ พจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต

เราไปศึกษาตัวอย่างของลำดับเรขาคณิตเพิ่มเติมกันนะคะ

ย่างที่ 3 ให้หาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$

จากโจทย์ $a_1 = 12$ และ $a_2 = 6$ จะได้ $r = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

และจาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้
$$a_n = 12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= (2^2 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= \frac{3}{2^{n-3}}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ $a_n = \frac{3}{2^{n-3}}$

ตัวอย่างที่ 4 **กำหนดสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต คือ $3 + k, 24 + k$ และ $108 + k$ ให้หาค่าของ k และสามพจน์แรกของลำดับนี้**

จาก $a_1 = 3 + k, a_2 = 24 + k, a_3 = 108 + k$ และ $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

จะได้

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{24 + k}{3 + k} = \frac{108 + k}{24 + k}$$

$$(24 + k)^2 = (108 + k)(3 + k)$$

$$576 + 48k + k^2 = 324 + 111k + k^2$$

$$576 - 324 = 111k - 48k$$

$$252 = 63k$$

$$k = 4$$

ตัวอย่างที่ 4 **กำหนดสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต คือ $3 + k, 24 + k$ และ $108 + k$ ให้หาค่าของ k และสามพจน์แรกของลำดับนี้**

เมื่อแทน k ด้วย 4 ใน a_1, a_2 และ a_3

จะได้

$$a_1 = 3 + 4 = 7$$

$$a_2 = 24 + 4 = 28$$

$$a_3 = 108 + 4 = 112$$

ดังนั้น ค่าของ k เท่ากับ 4 และสามพจน์แรกของลำดับนี้ คือ $7, 28, 112$

ลิมิตของลำดับ

เราสามารถนำลำดับมาประยุกต์กับเรื่องลิมิตได้

เรียนพร้อมแล้ว เราไปศึกษาเรื่องลิมิตของลำดับกันค่ะ

ลิมิตของลำดับ

ให้นักเรียนพิจารณาลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ถ้านักเรียนนำลำดับในแต่ละข้อมาเขียนแจกแจงพจน์แล้วลำดับแต่ละข้อจะเป็นอย่างไร ?

1) $a_n = 5$

2) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

3) $a_n = -n$

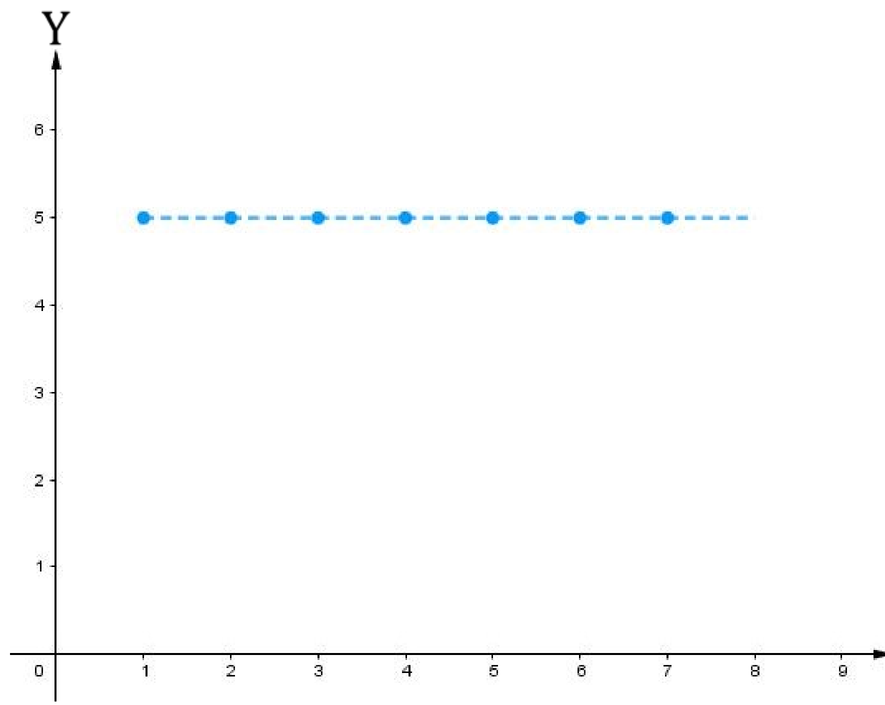
4) $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

5) $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

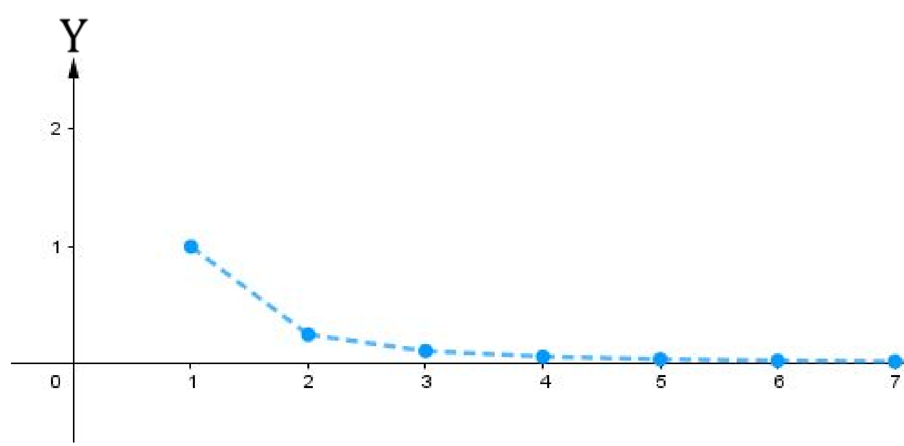
6) $a_n = 3(-1)^n$

ลิมิตของลำดับ

) $a_n = 5$ เมื่อเขียนแจกแจงพจน์ จะได้ $5, 5, 5, \ldots$
ลำดับ a_n เมื่อ n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด
องพจน์ที่ n เท่ากับ 5

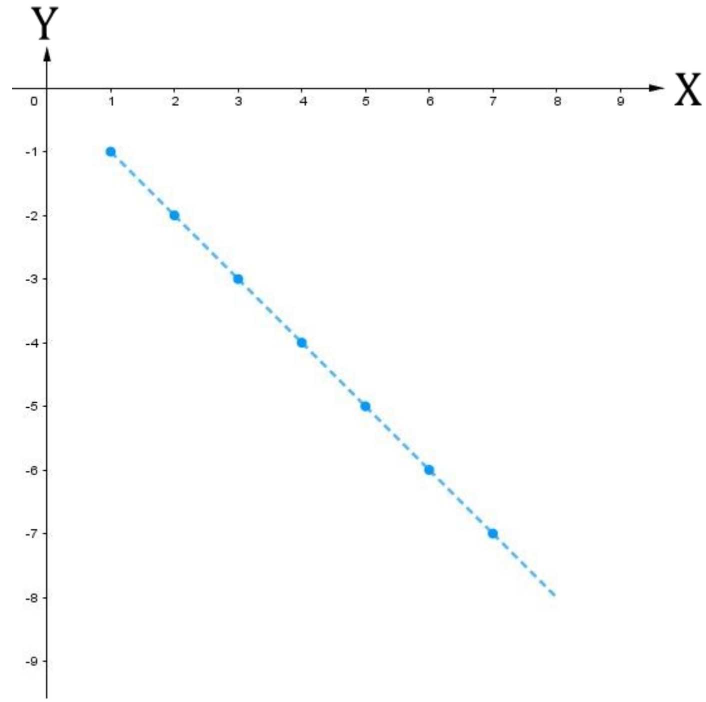


) $a_n = \frac{1}{n^2}$ เมื่อเขียนแจกแจงพจน์ จะได้ $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$
ลำดับ a_n เมื่อ n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด
องพจน์ที่ n ลดลงและเข้าใกล้ 0 แต่จะไม่เท่ากับ 0

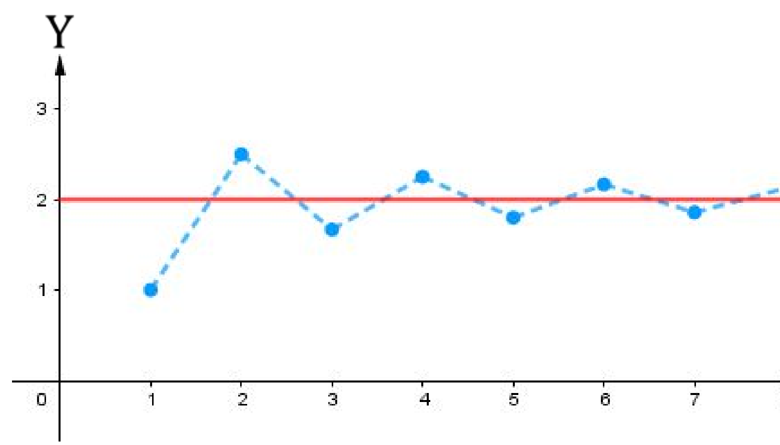


ลิมิตของลำดับ

) $a_n = -n$ เมื่อเขียนแจกแจงพจน์ จะได้ $-1, -2, -3, \ldots$
ลำดับ a_n เมื่อ n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด
องพจน์ที่ n มีค่าลดลงไม่มีที่สิ้นสุด

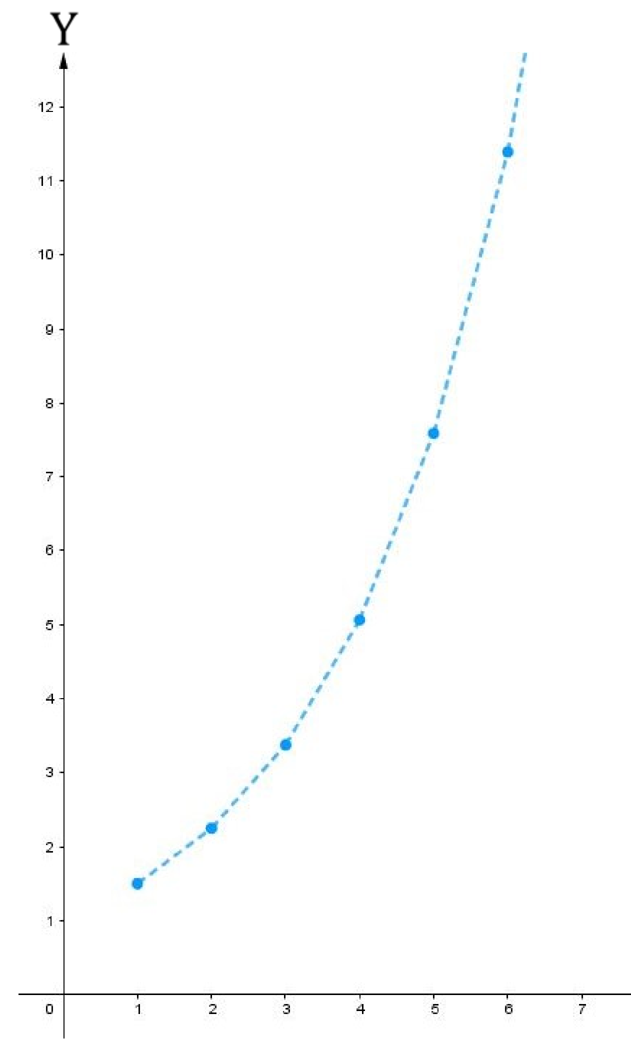


) $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ เมื่อเขียนแจกแจงพจน์ จะได้ $1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \ldots$
ลำดับ a_n เมื่อ n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด
องพจน์ที่ n เท่ากับ 2

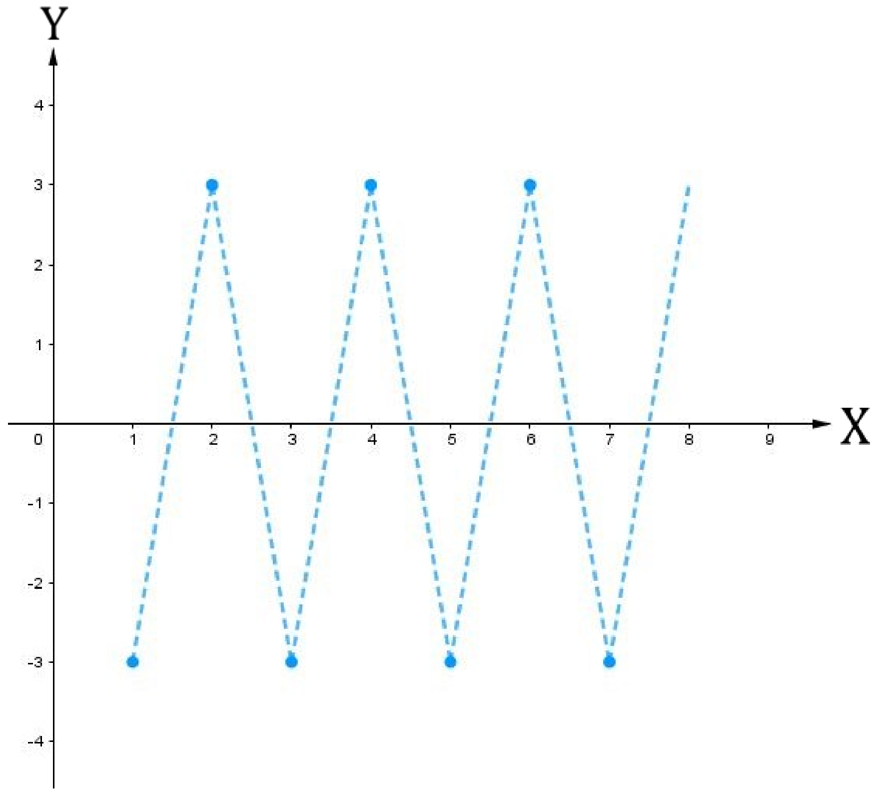


ลิมิตของลำดับ

อ 5) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ เมื่อเขียนแจกแจงพจน์ จะได้ $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \dots$
นว่า ลำดับ a_n เมื่อ n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด
ค่าของพจน์ที่ n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด



ลิมิตของลำดับ



จากข้อ 6) $a_n = 3(-1)^n$ เมื่อเขียนแจกแจงพจน์ จะได้ $-3, 3, -3, \ldots$
จะเห็นว่า ลำดับ a_n เมื่อ $\mathbf{n}$ เป็นจำนวนคี่บวก ทำให้ค่าของพจน์ที่ $\mathbf{n}$ เท่ากับ -3
และเมื่อ $\mathbf{n}$ เป็นจำนวนคู่บวก ทำให้ค่าของพจน์ที่ $\mathbf{n}$ เท่ากับ 3

ลิมิตของลำดับ

จากลำดับในข้อ 1), 2) และ 4) นักเรียนจะเห็นว่า
ลำดับเข้าใกล้หรือเท่ากับค่าคงตัวจำนวนใดจำนวนหนึ่ง

เรียกลำดับในข้อ 1), 2) และ 4) ว่า **ลำดับที่มีลิมิต หรือลำดับลู่เข้า**

จากลำดับในข้อ 3), 5) และ 6) นักเรียนจะเห็นว่า
บจะไม่เข้าใกล้หรือเท่ากับค่าคงตัวจำนวนใดจำนวนหนึ่ง

เรียกลำดับในข้อ 3), 5) และ 6) ว่า **ลำดับที่ไม่มีลิมิต หรือลำดับลู่ออก**

ลิมิตของลำดับ

จากตัวอย่างลำดับทั้ง 6 ข้อ สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ฎีบท 1

ด r เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จะได้ว่า

$\frac{1}{n^r} = 0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} n^r$ หาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบท 2

กำหนด r เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศู

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ หาค่าไม่ได้

ลิมิตของลำดับ

นอกจากนี้ ยังมีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลิมิตของลำดับ ดังนี้

ฎีบท 3

ด a_n, b_n, t_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ว่า

า $t_n = c$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = cA$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = AB$$

า $b_n \neq 0$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$

ลิมิตของลำดับ

เราลองนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ
มาช่วยหาคำตอบของตัวอย่างต่อไปนี้กันดูนะคะ

ย่างที่ 5 ให้หาลิมิตของลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $a_n = \dfrac{n+7}{n-2}$ 2) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n^3}$ 3) $a_n = \dfrac{n^2+6}{n+4}$

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+7}{n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{7}{n}\right)}{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{7}{n}}{1-\frac{2}{n}}$$

ย่างที่ 5 ให้หาลิมิตของลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $a_n = \dfrac{n+7}{n-2}$ 2) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n^3}$ 3) $a_n = \dfrac{n^2+6}{n+4}$

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{n-2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}}$$

$$= \frac{1+0}{1-0}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+7}{n-2} = 1$

ลิมิตของลำดับ

่างที่ 5 ให้หาลิมิตของลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $a_n = \dfrac{n+7}{n-2}$ 2) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n^3}$ 3) $a_n = \dfrac{n^2+6}{n+4}$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^3} - \frac{3}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3}{n^3} = 0$

่างที่ 5 ให้หาลิมิตของลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $a_n = \dfrac{n+7}{n-2}$ 2) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n^3}$ 3) $a_n = \dfrac{n^2+6}{n+4}$

ๅ

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{6}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}$$

ย่างที่ 5 ให้หาลิมิตของลำดับในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $a_n = \dfrac{n+7}{n-2}$ 2) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n^3}$ 3) $a_n = \dfrac{n^2+6}{n+4}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+6}{n+4} = \dfrac{1+0}{0+0}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+6}{n+4}$ หาค่าไม่ได้

ลิมิตของลำดับ

จากตัวอย่างที่ 5 ทำให้เราได้ข้อสังเกตว่า

ี่มีพจน์ทั่วไปอยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนาม

ลขชี้กำลังสูงสุดของตัวเศษกับตัวส่วนเท่ากัน แล้วลำดับ a_n เป็นลำดับลู่เข้าและเป็นลำดับที่มีลิมิต

ค่าของลิมิตเท่ากับผลหารของสัมประสิทธิ์ของเลขชี้กำลังสูงสุดที่เท่ากัน นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\text{สัมประสิทธิ์ของ } n \text{ ที่มีเลขชี้กำลังสูงสุดในตัวเศษ}}{\text{สัมประสิทธิ์ของ } n \text{ ที่มีเลขชี้กำลังสูงสุดในตัวส่วน}}$$

ลขชี้กำลังสูงสุดของตัวเศษน้อยกว่าตัวส่วน

ลำดับ a_n เป็นลำดับลู่เข้าและเป็นลำดับที่มีลิมิต

ค่าของลิมิตเท่ากับ 0 เสมอ นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

3) ถ้าเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวเศษมากกว่า

แล้วลำดับ a_n เป็นลำดับลู่ออก นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ หาค่าไม่ได้}$$

ลิมิตของลำดับ

นอกจากลำดับที่มีพจน์ทั่วไปอยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนามแล้ว ยังมีลำดับในรูปของจำนวนอตรรกยะ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ราลองไปดูตัวอย่างของลำดับในรูปของจำนวนอตรรกยะกันนะคะ

ฎีบท 4

ด a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0

L เป็นจำนวนจริงใด ๆ

m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ แล้ว } \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$$

ที่ 6 ให้หาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3}}$

นื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4n^2 - 1}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 3}$ หาค่าไม่ได้

จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 4 ได้ ดังนั้น เราต้องจัดรูป a_n ก่อนหาลิมิต

จาก
$$\frac{4n^2 - 1}{n^2 + 3} = \frac{n^2\left(4 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}}$$

ที่ 6 ให้หาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3}}$

ะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 - 1}{n^2 + 3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{4 - 0}{1 + 0}$$

$$= 4$$

โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}}$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3}} = 2$

สัญลักษณ์แทนการบวก

ที่เราได้ศึกษาเรื่องลำดับมาแล้ว เมื่อเรานำพจน์แต่ละพจน์ของลำดับ
ียนในรูปการบวก เราจะเรียกว่า อนุกรม ดังบทนิยามต่อไปนี้

ม

a_n เป็นลำดับของจำนวนจริง แล้วนิพจน์ที่แสดงในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เรียกว่า

รม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ เรียกว่า **อนุกรมจำกัด**

นด้วย $\sum_{i=1}^{n} a_i$ เช่น อนุกรม $1 + 3 + 5 + \dots + 51 = \sum_{i=1}^{26} (2i - 1)$

กรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ เรียกว่า **อนุกรมอนันต์**

นด้วย $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ เช่น อนุกรม $2 + 12 + 22 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (10i - 8)$

สัญลักษณ์แทนการบวก

ตัวอักษรกรีก Σ เป็นสัญลักษณ์แทนการบวก อ่านว่า ซิกมา

นอกจากนี้ ยังมีอีกหนึ่งสัญลักษณ์ที่จะแนะนำให้นักเรียนรู้จัก คือ S_n ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม กำหนด $a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots + a_n + \ \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์

ให้ $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม** เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

สัญลักษณ์แทนการบวก

ามารถเขียนอนุกรม S_n ในรูปสัญลักษณ์แทนการบวก $\sum$ ได้เป็น $\sum_{i=1}^{n} a_i$

ซึ่งสัญลักษณ์แทนการบวก $\sum$ มีสมบัติ ดังนี้

สมบัติของสัญลักษณ์แทนการบวก $\sum$

1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

สัญลักษณ์แทนการบวก

ห้นักเรียนศึกษาตัวอย่างเรื่องสัญลักษณ์แทนการบวก $\sum$ ต่อไปนี้

ที่ 7 **ให้หาค่าของ** $\sum_{i=1}^{15}(2i-1)^2$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{15}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{15}(4i^2-4i+1)\\ &= \sum_{i=1}^{15}4i^2-\sum_{i=1}^{15}4i+\sum_{i=1}^{15}1\\ &= 4\sum_{i=1}^{15}i^2-4\sum_{i=1}^{15}i+\sum_{i=1}^{15}1\\ &= 4(1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +15^2)-4(1+2+3+\ \dots\ +15)+15(1)\end{aligned}$$

ที่ 7 ให้หาค่าของ $\sum_{i=1}^{15}(2i-1)^2$

$$\sum_{i=1}^{15}(2i-1)^2 = 4(1{,}240) - 4(120) + 15$$

$$= 4{,}960 - 480 + 15$$

$$= 4{,}495$$

งนั้น $\sum_{i=1}^{15}(2i-1)^2 = 4{,}495$

สัญลักษณ์แทนการบวก

จากตัวอย่างที่ 7 นักเรียนจะเห็นว่า เมื่อต้องการหาผลบวกของอนุกรมจำนวนมากนั้น อาจจะไม่สะดวก

จึงมีสูตรการหาผลบวก n พจน์แรกในรูป $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$ และ $\sum_{i=1}^{n} i^3$ เพื่อให้การหาผลบวกของอนุกรมสะดวกมากยิ่งขึ้น ดังนี้

การหาผลบวก n พจน์แรกในรูป $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$ **และ** $\sum_{i=1}^{n} i^3$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

สัญลักษณ์แทนการบวก

ที่ 8 ให้หาผลบวกของ $\sum_{i=1}^{20}(3i+2)^2$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{n}(3i+2)^2 = \sum_{i=1}^{n}(9i^2+12i+4)$

$$= 9\sum_{i=1}^{n}i^2 + 12\sum_{i=1}^{n}i + \sum_{i=1}^{n}4$$

$$= 9\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] + 12\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + 4n$$

จะได้ $\sum_{i=1}^{20}(3i+2)^2 = 9\left[\frac{20(20+1)[2(20)+1]}{6}\right] + 12\left[\frac{20(20+1)}{2}\right] + 4(20)$

$$= 25{,}830 + 2{,}520 + 80$$

$$= 28{,}430$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{20}(3i+2)^2 = 28{,}430$

อนุกรมเลขคณิต

ต่อไปเราจะศึกษาเกี่ยวกับอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตกันนะคะ

โดยเริ่มจากอนุกรมเลขคณิตกันก่อนเลยค่ะ

นุกรมเลขคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต โดยที่ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต
จะเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย

งการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต หาได้จากสูตร

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

หรือ

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

เมื่อ a_1 คือ พจน์ที่ 1 ของอนุกรมเลขคณิต

a_n คือ พจน์ที่ n ของอนุกรมเลขคณิต

n คือ จำนวนพจน์ของอนุกรมเลขคณิต

d คือ ผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิต

และ S_n คือ ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต

ที่ 9 ให้หาผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $5 + 8 + 11 + \ ...$

เนื่องจาก $5 + 8 + 11 + \ ...$ เป็นอนุกรมเลขคณิตที่มี $a_1 = 5$ และ $d = 3$

และจาก $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

จะได้
$$S_{30} = \frac{30}{2}[2(5) + (30-1)(3)]$$
$$= 15(10 + 87)$$
$$= 1{,}455$$

ดังนั้น ผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 1,455

สำหรับสูตร $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ ใช้เมื่อทราบค่าของ n, a_1 และ d

อนุกรมเลขคณิต

ที่ 10 ให้หาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $3 + 10 + 17 + \ ... \ + 3{,}496$

เนื่องจาก $a_1 = 3, d = 7$ และ $a_n = 3{,}496$

หาจำนวนพจน์จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้

$$
\begin{aligned}
3{,}496 &= 3 + (n-1)(7) \\
3{,}496 &= 3 + 7n - 7 \\
3{,}496 &= 7n - 4 \\
7n &= 3{,}500 \\
n &= 500
\end{aligned}
$$

หาผลบวก 500 พจน์แรก

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้

$$
\begin{aligned}
S_{500} &= \frac{500}{2}(3 + 3{,}496) \\
&= 250(3{,}499) \\
&= 874{,}750
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 874,750

สำหรับสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ใช้เมื่อทราบค่าของ n, a_1 และ a_n

อนุกรมเรขาคณิต

เราทราบการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตกันแล้ว ต่อไปเราไปศึกษาอนุกรมเรขาคณิตกันต่อเลยค่ะ

มเรขาคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต โดยที่อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต จะเป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

รหาผลบวก $\mathbf{n}$ พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต หาได้จากสูตร

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

หรือ

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

เมื่อ a_1 คือ พจน์ที่ 1 ของอนุกรมเรขาคณิต

a_n คือ พจน์ที่ n ของอนุกรมเรขาคณิต

n คือ จำนวนพจน์ของอนุกรมเรขาคณิต

r คือ อัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิต

และ S_n คือ ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

ที่ 11 ให้หาผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $3 + 9 + 27 + \ldots$

เนื่องจาก $3 + 9 + 27 + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 3$ และ $r = 3$

และจาก $$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

จะได้ $$S_{15} = \frac{3(1 - 3^{15})}{1 - 3}$$

$$= 21{,}523{,}359$$

ดังนั้น ผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 21,523,359

สำหรับสูตร $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ ใช้เมื่อทราบค่าของ n, a_1 และ r

อนุกรมเรขาคณิต

ที่ 12 ให้หาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $39{,}366 + 13{,}122 + 4{,}374 + \ldots + 2$

เนื่องจาก $a_1 = 39{,}366, r = \frac{1}{3}$ และ $a_n = 2$

หาจำนวนพจน์จาก

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ 2 &= 39{,}366\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{19{,}683} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{9} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} n-1 &= 9 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

หาผลบวก 10 พจน์แรก

จาก $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}$

จะได้

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{39{,}366 - 2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{118{,}096}{2} \\ &= 59{,}048 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 59,048

สำหรับสูตร $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}$ ใช้เมื่อทราบค่าของ r, a_1 และ a_n

ผลบวกของอนุกรมอนันต์

ต่อไปเราจะศึกษาอนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเรขาคณิต

เราไปศึกษาตัวอย่างพร้อม ๆ กันเลยค่ะ

โดยผลบวกของอนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเรขาคณิต จะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ถ้า $|r| < 1$ แล้วอนุกรมเรขาคณิตเป็น**อนุกรมลู่เข้า**

ซึ่งมีผลบวกของอนุกรมอนันต์เท่ากับ $\frac{a_1}{1-r}$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$

กรณี 2 ถ้า $|r| > 1$ แล้วอนุกรมเรขาคณิตเป็น**อนุกรมลู่ออก**

ผลบวกของอนุกรมอนันต์

ที่ 13 **ให้หาผลบวกของอนุกรมอนันต์** $3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \ldots + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \ldots$

เนื่องจากอนุกรม $3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \ldots + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 3$ และ

ทำให้ได้ว่า อนุกรมที่กำหนดเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $|r| < 1$

และจาก $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$ เมื่อ $|r| < 1$

จะได้
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \ldots + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \ldots$ เท่ากับ 12

ผลบวกของอนุกรมอนันต์

การหาผลบวกของอนุกรมสามารถหาได้จาก
ผลบวกย่อยของอนุกรม ดังบทนิยามต่อไปนี้

นิยาม

หนดอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้

าดับ S_n เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่ $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้วกล่าวว่า **อนุกรม** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

อนุกรมลู่เข้า และเรียก S ว่า ผลบวกของอนุกรม

าดับ S_n เป็นลำดับลู่ออก แล้วกล่าวว่า **อนุกรม** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **เป็นอนุกรมลู่ออก**

ที่ 14 ให้หาผลบวก n พจน์แรกและผลบวกของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ (ถ้า S_n มีลิมิต)

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ \dots\ +\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\ \dots$$

จากอนุกรม $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ \dots\ +\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ หาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$$S_2 = S_1+\frac{1}{5\cdot 9} = \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9} = \frac{10}{5\cdot 9} = \frac{2}{9}$$

$$S_3 = S_2+\frac{1}{9\cdot 13} = \left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}\right)+\frac{1}{9\cdot 13} = \frac{27}{9\cdot 13} = \frac{3}{13}$$

$$S_4 = S_3+\frac{1}{13\cdot 17} = \left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}\right)+\frac{1}{13\cdot 17} = \frac{52}{13\cdot 17} = \frac{4}{17}$$

$\dots$

ที่ 14 ให้หาผลบวก n พจน์แรกและผลบวกของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ (ถ้า S_n มีลิมิต)

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ \dots\ +\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\ \dots$$

เมื่อนำผลบวกย่อยเขียนเรียงตามลำดับ จะได้ $\frac{1}{5},\frac{2}{9},\frac{3}{13},\frac{4}{17},\dots,S_n,\dots$ ซึ่งมีพจน์ทั่วไป คือ $\frac{n}{4n+1}$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{n}{4n+1}$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n+1}$

$$= \frac{1}{4}$$

นั่นคือ ผลบวกของอนุกรมอนันต์เท่ากับ $\frac{1}{4}$

ผลบวกของอนุกรมอนันต์

รมอนันต์ในรูปแบบอื่น ๆ ที่เขียนในรูปของ $\sum$ บางอนุกรม ไม่สามารถนำสมบัติของ $\sum$
ได้ จึงต้องจัดรูปพจน์ทั่วไปของอนุกรมให้สะดวกในการหาผลบวก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ที่ 15 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า ให้หาผลบวกของอนุกรมนี้

เนื่องจาก $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ เป็นพจน์ทั่วไปซึ่งอยู่ในรูปเศษส่วนที่มีตัวส่วนอยู่ในรูปการคูณของจำนวนนับสองจำนวน
จึงเขียนในรูปการบวกของเศษส่วน 2 เศษส่วน ดังนี้

กำหนด $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$ เมื่อ A และ B เป็นค่าคงตัว

เมื่อคูณ $(k+1)(k+2)$ ทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $1 = A(k+2) + B(k+1)$

ต่อไปจะหาค่าของ A และ B โดยเลือกแทนค่าของ k ที่ทำให้ A หรือ B จำนวนใดจำนวนหนึ่งเท่ากับ 0

ที่ 15 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า ให้หาผลบวกของอนุกรมนี้

เมื่อแทน k ด้วย -2 จะได้ $1 = 0 - B$

$B = -1$

เมื่อแทน k ด้วย -1 จะได้ $1 = A - 0$

$A = 1$

ดังนั้น $$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

นั่นคือ $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ \dots\ +\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

เนื่องจาก $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ เป็นการหาผลบวกตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ n จะได้

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

ผลบวกของอนุกรมอนันต์

ที่ 15 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า ให้หาผลบวกของอนุกรมนี้

การตรวจสอบอนุกรมลู่เข้าจะต้องหาลิมิตของ S_n เมื่อ n เข้าใกล้ ∞

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ดอกเบี้ยทบต้น

ถ้าจะนำลำดับและอนุกรมมาประยุกต์ในชีวิตจริงของเรา
นักเรียนคิดว่า เราจะนำมาประยุกต์กับเรื่องใดได้บ้างคะ?

ถ้าพูดถึงเรื่องดอกเบี้ยทบต้น ก็เป็นอีกหนึ่งเรื่องในชีวิตจริง
ที่เราสามารถนำลำดับและอนุกรมมาประยุกต์ได้

งนั้น เราไปทบทวนความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยทบต้นกันเลยค่ะ

ดอกเบี้ยทบต้น

ยทบต้น** คือ ดอกเบี้ยที่กำหนดให้มีการนำเอาดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในแต่ละครั้งที่มีการคิดด
ไปรวมกับเงินต้น เพื่อนำมาเป็นเงินต้นงวดถัดไป

หรับการหาเงินรวมทั้งหมด คือ $A = P(1+i)^n$

เมื่อ A แทนเงินรวมทั้งหมด

P แทนเงินต้น

i แทนอัตราดอกเบี้ยต่องวด

n แทนจำนวนงวดที่คิดดอกเบี้ยทบต้น

เราลองไปศึกษาตัวอย่างกันค่ะ

ดอกเบี้ยทบต้น

ที่ 16 แอมฝากเงินกับธนาคารเป็นจำนวนเงิน 20,000 บาท ซึ่งธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 2.5
โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี แอมจะได้รับดอกเบี้ยทั้งห

จากโจทย์ ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 2.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน

จะได้ว่า ในเวลา 1 ปี ธนาคารให้ดอกเบี้ยทั้งหมด $\frac{12}{6} = 2$ งวด

ดังนั้น ในเวลา 2 ปี ธนาคารให้ดอกเบี้ยทั้งหมด $2 \times 2 = 4$ งวด

และอัตราดอกเบี้ยแต่ละงวดเท่ากับ $\frac{2.5\%}{2} = 1.25\%$

จะได้ $\mathrm{P} = 20{,}000, \mathrm{i} = \frac{1.25}{100} = 0.0125$ และ $\mathrm{n} = 4$

จากสูตร $\quad \mathrm{A} = \mathrm{P}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$

จะได้ $\quad \mathrm{A} = 20{,}000(1+0.0125)^4$

$$\approx 21{,}018.91$$

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 2 ปี แอมจะได้รับดอกเบี้ยทั้งหมดประมาณ $21{,}018.91 - 20{,}000 = 1{,}0$

มูลค่าของเงิน

ต่อไปเราจะศึกษาเรื่องมูลค่าของเงินและค่ารายงวด
ซึ่งเป็นการนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมมาประยุกต์ใช้

โดยเริ่มจากเรื่องมูลค่าของเงินกันก่อนนะคะ

มูลค่าของเงิน

มูลค่าของเงินแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ มูลค่าปัจจุบัน และมูลค่าอนาคต โดยมีสูตรในการคำนวณ ดังนี้

$$FV = PV(1+i)^{n}$$

หรือ

$$PV = FV(1+i)^{-n}$$

เมื่อ FV แทนมูลค่าอนาคต

PV แทนมูลค่าปัจจุบัน

i แทนอัตราดอกเบี้ยต่องวด

n แทนจำนวนงวดเวลา

มูลค่าของเงิน

ที่ 17 อ้อมฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุ
ถ้าอ้อมต้องการให้มีเงินในบัญชี 100,000 บาท ในอีก 3 ปีข้างหน้า อ้อมต้องฝากเงินต้นเท่

ากโจทย์ ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 4 เดือน

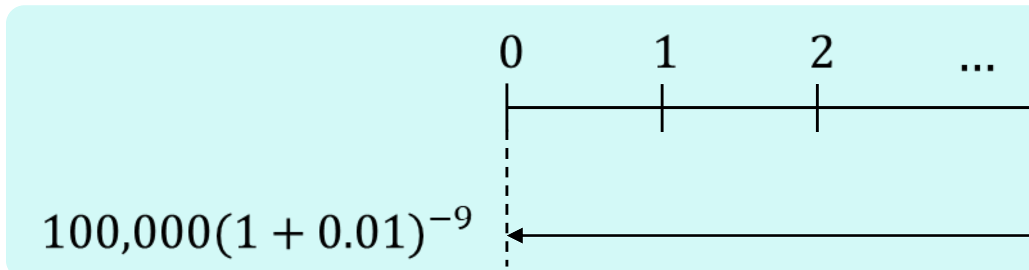
ะได้ว่า ในเวลา 1 ปี ธนาคารให้ดอกเบี้ยทั้งหมด $\frac{12}{4} = 3$ งวด

ังนั้น ในเวลา 3 ปี ธนาคารให้ดอกเบี้ยทั้งหมด $3 \times 3 = 9$ งวด

ละอัตราดอกเบี้ยแต่ละงวดเท่ากับ $\frac{3\%}{3} = 1\%$

ะได้ $\mathrm{FV} = 100{,}000, \mathrm{i} = \frac{1}{100} = 0.01$ และ $\mathrm{n} = 9$

ขียนเส้นเวลาแสดงจำนวนเงินที่อ้อมต้องฝากได้ ดังนี้



ากสูตร $\mathrm{PV} = \mathrm{FV}(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}$

ะได้ $\mathrm{PV} = 100{,}000(1+0.01)^{-9}$

$\approx 91{,}433.98$

ังนั้น อ้อมต้องฝากเงินต้นประมาณ 91,433.98 บาท

ค่ารายงวด

รายงวด หมายถึง การจ่ายเงินหรือฝากเงินเป็นงวด ๆ ติดต่อกันหลายงวด โดยการจ่ายเงินแต่ละงวดมีระยะเวลาห่างเท่า ๆ กัน

รายงวดแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ดังนี้

ค่ารายงวด ณ ตอนปลายงวด

$$FVA_n = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

ค่ารายงวด ณ ตอนต้นงวด

$$FVA_n = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

เมื่อ FVA_n แทนเงินรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นงวดที่

A แทนจำนวนเงินที่ได้รับหรือจ่ายแต

i แทนอัตราดอกเบี้ยต่องวด

n แทนจำนวนงวดเวลา

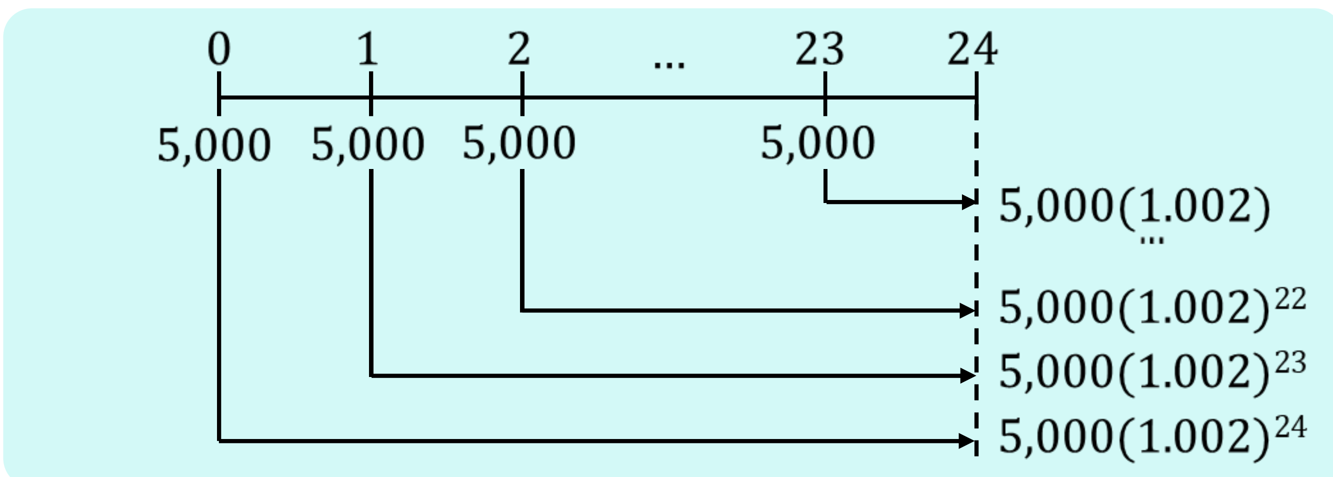
ค่ารายงวด

ที่ 18 ปอมฝากเงิน 5,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี ซึ่งธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 2
โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 ให้หา

1) จำนวนเงินที่ปอมได้รับโดยที่ปอมฝากเงินกับธนาคารทุกต้นเดือน

2) จำนวนเงินที่ปอมได้รับโดยที่ปอมฝากเงินกับธนาคารทุกสิ้นเดือน

1) จากโจทย์ ปอมฝากเงิน 5,000 บาท ทุกต้นเดือนเป็นเวลา 2 ปี
ซึ่งธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 2.4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน
จะได้ $A = 5{,}000, i = \frac{2.4}{12 \times 100} = 0.002$ และ $n = 12 \times 2 = 24$
เขียนเส้นเวลาแสดงจำนวนเงินรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นปีที่ 2 ได้ ดังนี้



ที่ 18 ปอมฝากเงิน 5,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี ซึ่งธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 2
โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 ให้หา

1) จำนวนเงินที่ปอมได้รับโดยที่ปอมฝากเงินกับธนาคารทุกต้นเดือน

2) จำนวนเงินที่ปอมได้รับโดยที่ปอมฝากเงินกับธนาคารทุกสิ้นเดือน

1) จะได้ $\mathrm{FVA_n} = 5{,}000(1.002) + 5{,}000(1.002)^2 + 5{,}000(1.002)^3 + \ldots + 5{,}000(1.002)^{24}$

จะเห็นว่า เงินรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นปีที่ 2 เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ 5,000(1.002)

และมีอัตราส่วนร่วม คือ 1.002

ดังนั้น
$$\mathrm{FVA_n} = 5{,}000(1.002)\left[\frac{(1.002)^{24}-1}{0.002}\right]$$
$$= 5{,}010\left[\frac{(1.002)^{24}-1}{0.002}\right]$$
$$\approx 123{,}046.51$$

นั่นคือ เมื่อสิ้นปีที่ 2 ปอมจะได้รับเงินทั้งหมดประมาณ 123,046.51 บาท

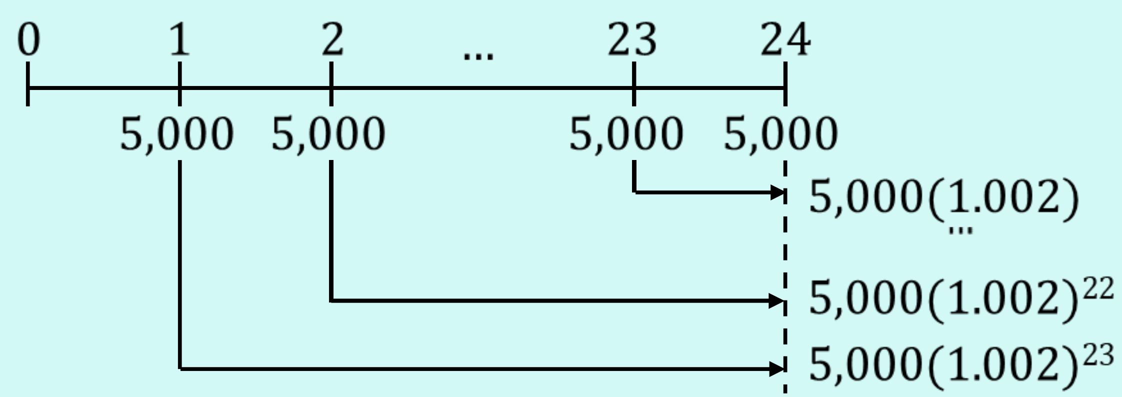
ค่ารายงวด

ที่ 18 ปอมฝากเงิน 5,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี ซึ่งธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 2
โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 ให้หา

1) จำนวนเงินที่ปอมได้รับโดยที่ปอมฝากเงินกับธนาคารทุกต้นเดือน

2) จำนวนเงินที่ปอมได้รับโดยที่ปอมฝากเงินกับธนาคารทุกสิ้นเดือน

2) จากโจทย์ ปอมฝากเงิน 5,000 บาท ทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 2 ปี
ซึ่งธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 2.4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน
จะได้ $A = 5{,}000, i = \frac{2.4}{12 \times 100} = 0.002$ และ $n = 12 \times 2 = 24$
เขียนเส้นเวลาแสดงจำนวนเงินรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นปีที่ 2 ได้ ดังนี้



ค่ารายงวด

ที่ 18 ปอมฝากเงิน 5,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี ซึ่งธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย 2
โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 ให้หา

1) จำนวนเงินที่ปอมได้รับโดยที่ปอมฝากเงินกับธนาคารทุกต้นเดือน

2) จำนวนเงินที่ปอมได้รับโดยที่ปอมฝากเงินกับธนาคารทุกสิ้นเดือน

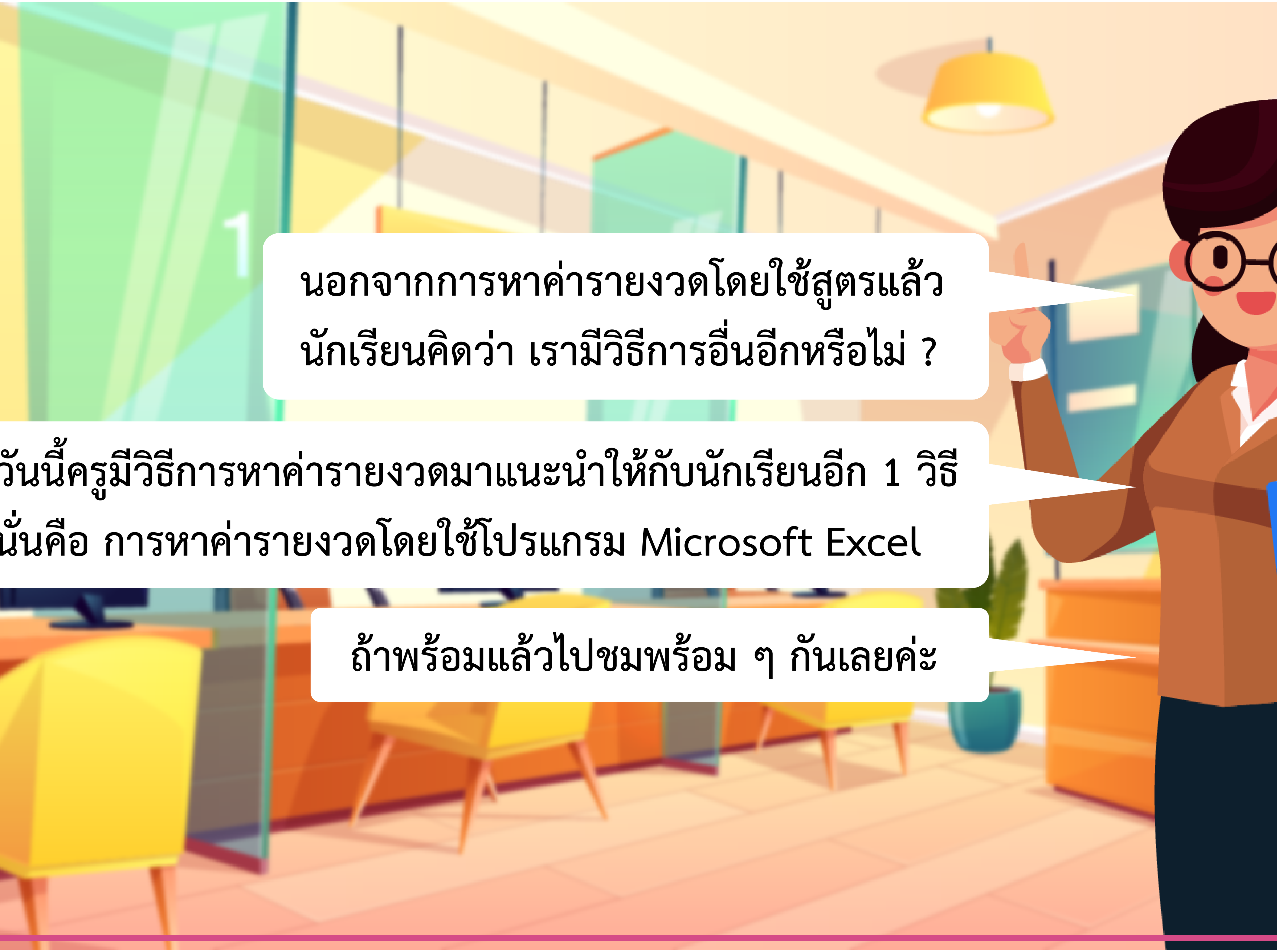
2) จะได้ $\mathrm{FVA}_n = 5{,}000 + 5{,}000(1.002) + 5{,}000(1.002)^2 + \ \ldots + 5{,}000(1.002)^{23}$

จะเห็นว่า เงินรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นปีที่ 2 เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ 5,000
และมีอัตราส่วนร่วม คือ 1.002

ดังนั้น
$$\mathrm{FVA}_n = 5{,}000\left[\frac{(1.002)^{24}-1}{0.002}\right]$$
$$\approx 122{,}800.91$$

นั่นคือ เมื่อสิ้นปีที่ 2 ปอมจะได้รับเงินทั้งหมดประมาณ 122,800.91 บาท

จากตัวอย่างที่ 18 นักเรียนจะเห็นว่า เงินรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นปีที่ 2 ที่ได้จากการฝากตอนต้นงวดจะมากกว่าฝากตอนปลายงวด


นอกจากการหาค่ารายงวดโดยใช้สูตรแล้ว
นักเรียนคิดว่า เรามีวิธีการอื่นอีกหรือไม่ ?
วันนี้ครูมีวิธีการหาค่ารายงวดมาแนะนำให้กับนักเรียนอีก 1 วิธี
นั่นคือ การหาค่ารายงวดโดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel
ถ้าพร้อมแล้วไปชมพร้อม ๆ กันเลยค่ะ

VDO Clip

นักเรียนยังจำคำถามเกี่ยวกับเงินผ่อนชำระได้ไหมคะ ?

รกู้เงินกับธนาคาร ทางธนาคารจะพิจารณาเงินเดือนของผู้กู้เพื่อจะคำนวณเงินผ่อนช
ต่ละเดือน ซึ่งเงินผ่อนชำระจะประกอบด้วยเงินต้นและดอกเบี้ยตามที่ธนาคารกำหนด

รียนจะนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมมาช่วยในการคำนวณเงินที่ผ่อนชำระ
ต่ละเดือนได้อย่างไร ?


จากคำถามนั้น เราสามารถนำสูตรการคำนวณค่ารายงวด
มาช่วยในการคำนวณเงินผ่อนชำระในแต่ละเดือนได้
ซึ่งเราจะต้องเลือกใช้สูตรให้ถูกต้องว่า
✓ เราผ่อนชำระทุกต้นเดือนหรือปลายเดือน
✓ ธนาคารคิดดอกเบี้ยอย่างไร
✓ ยอดเงินกู้ทั้งหมดเท่าไร


เป็นอย่างไรกันบ้างคะ สำหรับการนำความรู้ที่เราศึกษามาประยุกต์ใช้กับชีวิตจริง
ด้รับความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมอย่างครบถ้วนแล้ว
เรียนจะนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริงได้อีกหลาย ๆ เรื่องเลยนะคะ
แล้วพบกันใหม่ค่ะ