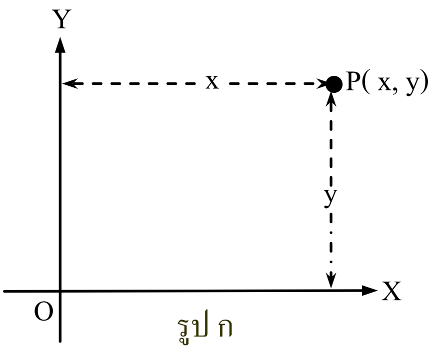
3.2 ภาคตัดกรวย (Conic Section)

3.2.1 การเลื่อนแกนทางขนาน(Translation of Axes)

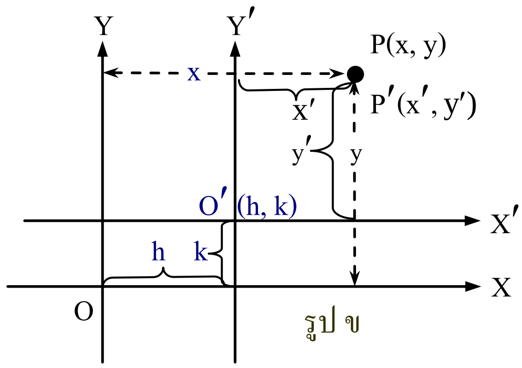
การเลื่อนแกนทางขนาน หมายถึงการเปลี่ยนแปลงแกนพิกัดเดิมอย่างน้อยหนึ่งแกน (แกน X หรือแกน Y) โดยให้แกนพิกัดใหม่ขนานกับแกนพิกัดเดิม

การเลื่อนแกนทางขนานนับเป็นพื้นฐานที่สำคัญที่จะช่วยในการศึกษาเกี่ยวกับภาคตัดกรวยได้สะดวกยิ่งขึ้นในระบบแกนมุมฉาก เราใช้แกน X และ Y สำหรับอ้างอิงพิกัดหรือตำแหน่งของจุดในระนาบ

จุด P(x, y) เป็นจุดที่อยู่ห่างจากแกน Y ไปทางขวามือเป็นระยะ x หน่วย และอยู่ห่างจากแกน X ซึ่งอยู่เหนือแกน X เป็นระยะ y หน่วย **ดังรูป ก**



รูป ก



รูป ข

เมื่อเลื่อนแกน จุด P(x, y) ยังคงที่ แต่พิกัดของจุด P จะเปลี่ยนไปเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ **ดังรูป ข**

แกนพิกัดใหม่ X′ และ Y′ ขนานกับแกนพิกัดเดิม X และ Y ตามลำดับ พิกัดของจุดกำเนิดใหม่เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือจุด O′(h, k)

นั่นคือแกนพิกัดใหม่เกิดจากการเลื่อนแกนตามแนวนอน h หน่วย และตามแนวตั้ง k หน่วย

ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

(x′, y′) เป็นพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ และ h, k เป็นจำนวนจริง

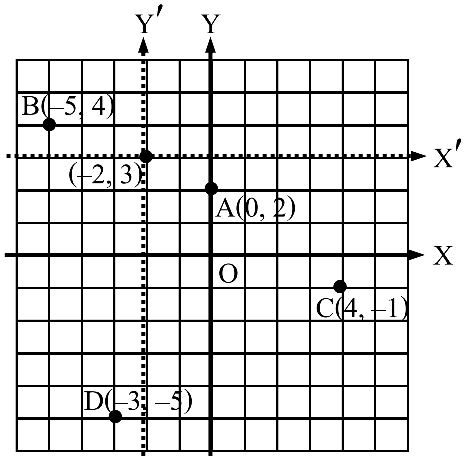
ดังนั้น จะได้ $\boxed{\begin{array}{l} x = x' + h \\ y = y' + k \end{array}}$ หรือ $\boxed{\begin{array}{l} x' = x - h \\ y' = y - k \end{array}}$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (–2, 3) เป็นจุดกำเนิดใหม่ ซึ่ง A(0, 2), B(–5, 4), C(4, –1) และ D(–3, –5) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม จงหาพิกัดของจุดเหล่านี้เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

วิธีทำ ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

และ (x', y') เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ในที่นี้ $(h, k) = (-2, 3)$ นั่นคือ $h = -2$ และ $k = 3$



(1) A(0, 2) ซึ่ง $x = 0$, $y = 2$

จาก $x' = x - h$ จะได้ $x' = 0 + 2 = 2$

และ $y' = y - k$ จะได้ $y' = 2 - 3 = -1$

ดังนั้น พิกัดของจุด A(0, 2) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด (2, –1)

(2) B(–5, 4) ซึ่ง $x = -5$, $y = 4$

จาก $x' = x - h$ จะได้ $x' = -5 + 2 = -3$

และ $y' = y - k$ จะได้ $y' = 4 - 3 = 1$

ดังนั้น พิกัดของจุด B(–5, 4) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด (–3, 1)

(3) C(4, –1) ซึ่ง $x = 4$ และ $y = -1$

จาก $x' = x - h$ จะได้ $x' = 4 + 2 = 6$

และ $y' = y - k$ จะได้ $y' = -1 - 3 = -4$

ดังนั้น พิกัดของจุด C(4, –1) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด (6, –4)

(4) D(–3, –5) ซึ่ง $x = -3$ และ $y = -5$

จาก $x' = x - h$ จะได้ $x' = -3 + 2 = -1$

และ $y' = y - k$ จะได้ $y' = -5 - 3 = -8$

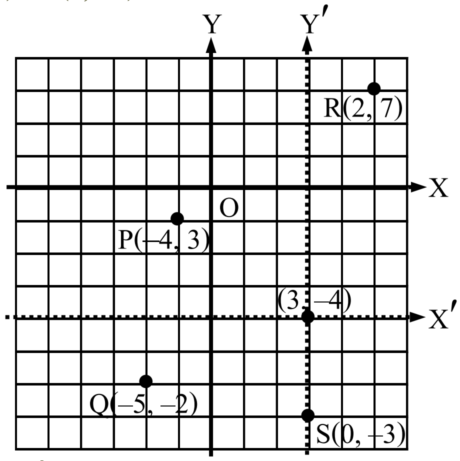
ดังนั้น พิกัดของจุด D(–3, –5) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด (–1, –8)

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (3, –4) เป็นจุดกำเนิดใหม่ ซึ่ง P(–4, 3), Q(–5, –2, R(2, 7) และ S(0, –3) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่จงหาพิกัดของจุดเหล่านี้เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

วิธีทำ ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

และ (x', y') เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ในที่นี้ $(h, k) = (3, -4)$ นั่นคือ $h = 3$ และ $k = -4$



(1) $P(-4, 3)$ ซึ่ง $x' = -4$ และ $y' = 3$

จาก $x = x' + h$ จะได้ $x = -4 + 3 = -1$

และ $y = y' + k$ จะได้ $y = 3 - 4 = -1$

ดังนั้น พิกัดของจุด $P(-4, 3)$ เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด $(-1, -1)$

(2) $Q(-5, -2)$ ซึ่ง $x' = -5$ และ $y' = -2$

จาก $x = x' + h$ จะได้ $x = -5 + 3 = -2$

และ $y = y' + k$ จะได้ $y = -2 - 4 = -6$

ดังนั้น พิกัดของจุด $Q(-5, -2)$ เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด $(-2, -6)$

(3) $R(2, 7)$ ซึ่ง $x' = 2$ และ $y' = 7$

จาก $x = x' + h$ จะได้ $x = 2 + 3 = 5$

และ $y = y' + k$ จะได้ $y = 7 - 4 = 3$

ดังนั้น พิกัดของจุด $R(2, 7)$ เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด $(5, 3)$

(4) $S(0, -3)$ ซึ่ง $x' = 0$ และ $y' = -3$

จาก $x = x' + h$ จะได้ $x = 0 + 3 = 3$

และ $y = y' + k$ จะได้ $y = -3 - 4 = -7$

ดังนั้น พิกัดของจุด $S(0, -3)$ เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด $(3, -7)$

ข้อตกลง การเลื่อนแกนทางขนานโดยมีจุด (h, k) เป็นจุดกำเนิดใหม่เรียกสั้นๆว่า "การเลื่อนแกนไปที่จุด (h, k)"

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด $(-3, 4)$ กราฟของสมการ $y = |x+3|+4$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

วิธีทำ จากโจทย์ เลื่อนแกนไปที่จุด $(-3, 4)$ จะได้ $(h, k) = (-3, 4)$ นั่นคือ $h = -3,\ k = 4$

จาก $x = x' + h$ จะได้ $x = x' - 3$ และ $y = y' + k$ จะได้ $y = y' + 4$

แทนค่า x ด้วย $x' - 3$ และ y ด้วย $y' + 4$ ลงในสมการ $y = |x+3|+4$

จะได้
$$y' + 4 = |x' - 3 + 3| + 4$$
$$y' + 4 - 4 = |x' - 3 + 3|$$

ดังนั้น จะได้ $y' = |x'|$ จะเป็นสมการเทียบกับแกนใหม่ของกราฟรูปนี้

ตัวอย่างที่ 4 ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด $(3, -7)$ กราฟของสมการ $x^2 - 6x + y^2 + 14y - 2 = 0$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

วิธีทำ จากโจทย์ เลื่อนแกนไปที่จุด $(3, -7)$ จะได้ $(h, k) = (3, -7)$ นั่นคือ $h = 3,\ k = -7$

จาก $x = x' + h$ จะได้ $x = x' + 3$ และ $y = y' + k$ จะได้ $y = y' - 7$

แทนค่า x ด้วย $x' + 3$ และ y ด้วย $y' - 7$

ลงในสมการ
$$x^2 - 6x + y^2 + 14y - 2 = 0$$
จะได้
$$(x' + 3)^2 - 6(x' + 3) + (y' - 7)^2 + 14(y' - 7) - 2 = 0$$
$$(x')^2 + 6x' + 9 - 6x' - 18 + (y')^2 - 14y' + 49 + 14y' - 98 - 2 = 0$$
$$(x')^2 + (y')^2 = 60$$

ดังนั้น จะได้ $(x')^2 + (y')^2 = 60$ จะเป็นสมการเทียบกับแกนใหม่ของกราฟรูปนี้

ตัวอย่างที่ 5 จากสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ ถ้าต้องการเลื่อนแกนอ้างอิงให้ได้สมการในรูปที่กำหนดให้แล้วจะเลือกจุดใดเป็นจุดกำเนิด

(1) $2x - 3y + 12 = 0$ ต้องการให้อยู่ในรูป $2x' = 3y'$

วิธีทำ จากสมการ $2x - 3y + 12 = 0$

จะได้
$$2x = 3y - 12$$
$$2x = 3(y - 4)$$

ให้ $x' = x$ และ $y' = y - 4$ แทน x ด้วย x' และ $y - 4$ ด้วย y'

ลงในสมการ $2x = 3(y - 4)$ จะได้ $2x' = 3y'$

ดังนั้น จะได้ สมการ $2x' = 3y'$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด $(0, 4)$

หรือ จากสมการ $2x - 3y + 12 = 0$

จะได้ $2x + 6 = 3y - 6$

$2(x + 3) = 3(y - 2)$

ให้ $x' = x + 3$ และ $y' = y - 2$ แทน $x + 3$ ด้วย x' และ $y - 2$ ด้วย y'

ลงในสมการ $2(x + 3) = 3(y - 2)$

ดังนั้น จะได้ สมการ $2x' = 3y'$ อยู่ในรูปที่ต้องการและจุดกำเนิดใหม่คือจุด $(-3, 2)$

<u>ข้อสังเกต</u> จะเห็นว่า $2x - 3y + 12 = 0$ เป็นสมการเส้นตรง จะเลือกจุดกำเนิดใหม่ใดๆก็ได้ที่เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงนี้

(2) $y(x - 5) = 3$ ต้องการให้อยู่ในรูป $y'x' = 3$

วิธีทำ จากสมการ $y(x - 5) = 3$ ให้ $x' = x - 5$ และ $y' = y$

แทน $x - 5$ ด้วย x' และ y ด้วย y' ลงในสมการ $y(x - 5) = 3$

ดังนั้นจะได้ สมการ $y'x' = 3$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด $(5, 0)$

(3) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 24 = 0$ ต้องการให้อยู่ในรูป $(x')^2 + (y')^2 = 1$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 24 = 0$

จะได้ $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -24 + 16 + 9$

$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$

ให้ $x' = x - 4$ และ $y' = y + 3$ แทน $x - 4$ ด้วย x' และ $y + 3$ ด้วย y'

ลงในสมการ $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$

ดังนั้นจะได้สมการ $(x')^2 + (y')^2 = 1$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด $(4, -3)$

(4) $25x^2 - 9y^2 + 50x + 36y = 236$ ต้องการให้อยู่ในรูป $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{25} = 1$

วิธีทำ จากสมการ $25x^2 - 9y^2 + 50x + 36y = 236$

จะได้ $(25x^2 + 50x) - (9y^2 - 36y) = 236$

$25(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 4y) = 236$

$25(x^2 + 2x + 1) - 9(y^2 - 4y + 4) = 236 + 25 - 36$

$25(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 225$

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

ให้ $x' = x + 1$ และ $y' = y - 2$

แทน $x + 1$ ด้วย x' และ $y - 2$ ด้วย y' ลงในสมการ $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

ดังนั้นจะได้ สมการ $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{25} = 1$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด $(-1, 2)$

การเลื่อนแกนทางขนานกับการเขียนกราฟ

การเขียนกราฟโดยการเลื่อนแกนทางขนานไปที่จุด (h, k) ที่เหมาะสม จะเขียนง่ายกว่าการเขียนกราฟในระบบพิกัดฉากที่มีจุดกำเนิดที่จุด (0, 0) โดยเปลี่ยนพิกัดจุด P(x, y) ใดๆ ในระบบเดิม เป็น $P(x', y')$ ในระบบใหม่ โดยที่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ จะทำให้สมการเทียบกับแกนใหม่มีรูปซึ่งสะดวกต่อการเขียนกราฟ ดังนี้

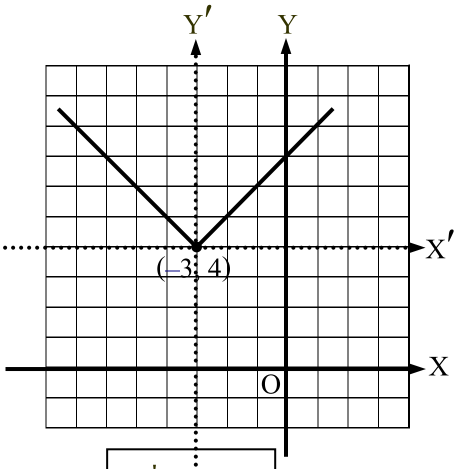
ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

(1) $y = |x + 3| + 4$

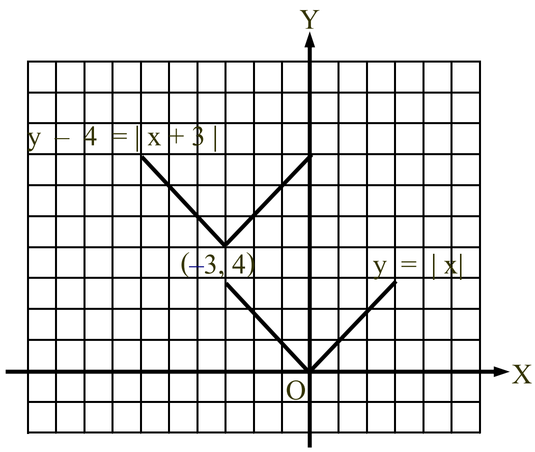
วิธีทำ จากสมการ $y = |x + 3| + 4$

จัดได้เป็น $y - 4 = |x + 3|$ และเลื่อนแกนไปที่จุด (–3, 4)

ดังนั้น จะได้สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ $y' = |x'|$



เลื่อนแกน

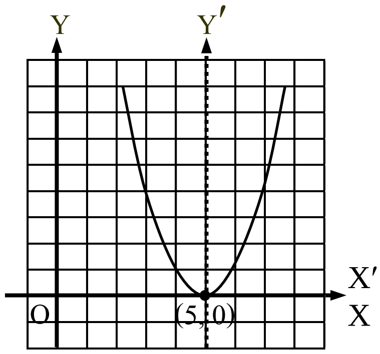


เลื่อนกราฟ

(2) $y = (x - 5)^2$

วิธีทำ จากสมการ $y = (x - 5)^2$ และเลื่อนแกนไปที่จุด (5, 0)

ดังนั้น จะได้ สมการเทียบแกนไปกับแกนใหม่ คือ $y' = (x')^2$



(4) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

วิธีทำ จากสมการ $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

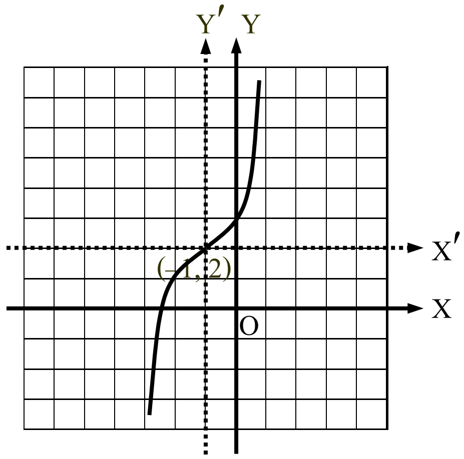
จัดได้เป็น $y = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 2$

$y - 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$y - 2 = (x + 1)^3$

และเลื่อนแกนไปที่จุด (–1, 2)

ดังนั้น จะได้สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ $y' = (x')^3$



(5) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$

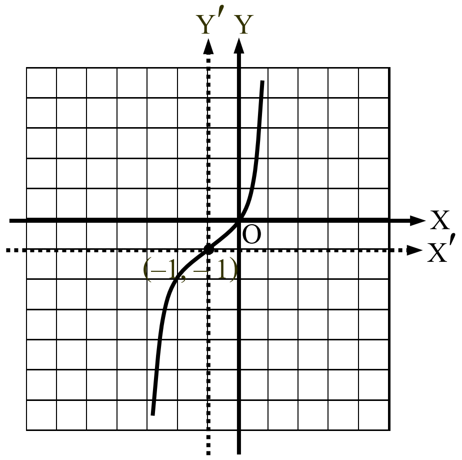
วิธีทำ จากสมการ $y = x^3 + 3x^2 + 3x$

จัดได้เป็น $y + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$y + 1 = (x + 1)^3$

และเลื่อนแกนไปที่จุด (–1, –1)

ดังนั้น จะได้ สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ $y' = (x')^3$



ใบกิจกรรมที่ 3.2.1

1. ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (5, –4) เป็นจุดกำเนิดใหม่ ซึ่ง A(5, –10) , B(–7, 3), C(0, 0), D(–3, –2) และ E(9, 0) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม จงหาพิกัดของจุดเหล่านี้เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

วิธีทำ ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

และ (x', y') เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ในที่นี้ (h, k) = (5, –4) นั่นคือ h = 5 และ k = –4

(1) A(5, –10) ซึ่ง x = 5 และ y = –10

จาก $x' = x - h$ จะได้ x' = ...

และ $y' = y - k$ จะได้ y' = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด A(5, –10) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด..................

(2) B(–7, 3) ซึ่ง x = ... และ y = ...

จาก $x' = x - h$ จะได้ x' = ...

และ $y' = y - k$ จะได้ y' = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด B(–7, 3) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด.................

(3) C(0, 0) ซึ่ง x = ... และ y = ...

จาก $x' = x - h$ จะได้ x' = ...

และ $y' = y - k$ จะได้ y' = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด C(0, 0) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด..................

(4) D(–3, –2) ซึ่ง x = ... และ y = ...

จาก $x' = x - h$ จะได้ x' = ...

และ $y' = y - k$ จะได้ y' = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด D(–3, –2) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด..................

(5) E(9, 0) ซึ่ง x = ... และ y = ...

จาก $x' = x - h$ จะได้ x' = ...

และ $y' = y - k$ จะได้ y' = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด E(9, 0) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด..................

2. ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (4, 3) เป็นจุดกำเนิดใหม่ ซึ่ง P(–9, 3), Q(–7, –8), R(5, –1), S(10, 8) และ T(–4, 3) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ จงหาพิกัดของจุดเหล่านี้เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

วิธีทำ ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

และ (x', y') เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ในที่นี้ (h, k) = (4, 3) นั่นคือ h = 4 และ k = 3

(1) P(–9, 3) ซึ่ง $x' = -9$ และ $y' = 3$

จาก $x = x' + h$ จะได้ x = ...

และ $y = y' + k$ จะได้ y = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด P(–9, 3) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด.................

.

(2) Q(–7, –8) ซึ่ง x' =.......... และ y' = ...

จาก $x = x' + h$ จะได้ x = ...

และ $y = y' + k$ จะได้ y = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด Q(–7, –8) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด..................

(3) R(5, –1) ซึ่ง x' =.......... และ y' = ...

จาก $x = x' + h$ จะได้ x = ...

และ $y = y' + k$ จะได้ y = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด R(5, –1) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด.................

(4) S(10, 8) ซึ่ง x' =.......... และ y' = ...

จาก $x = x' + h$ จะได้ x = ...

และ $y = y' + k$ จะได้ y = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด S(10, 8) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด................

(5) T(–4, 3) ซึ่ง x' =.......... และ y' = ...

จาก $x = x' + h$ จะได้ x = ...

และ $y = y' + k$ จะได้ y = ...

ดังนั้น พิกัดของจุด T(–4, 3) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด................

3. ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (2, 7) กราฟของสมการ $y = |x-2|+7$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4. ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (–4, 0) กราฟของสมการ $x^2 + 8x - y + 16 = 0$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

5. ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (–3, 2) กราฟของสมการ $x^2 + 6x + 4y^2 - 16y + 21 = 0$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

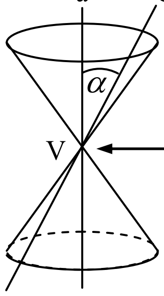
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

ภาคตัดกรวย (Conic Section)

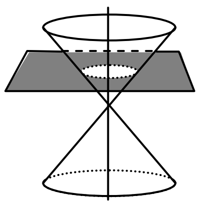
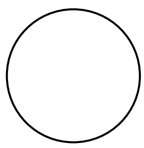
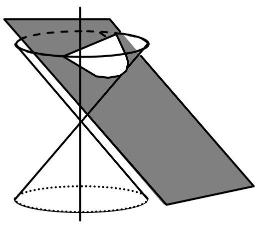
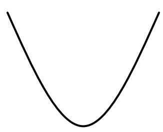
กรวยเป็นรูปทรงเรขาคณิตที่มีวิธีสร้างในเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

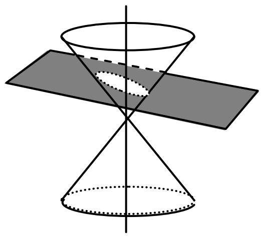
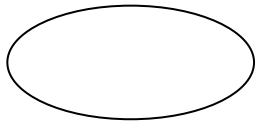
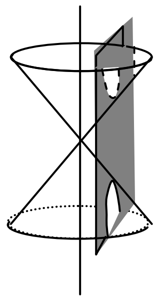
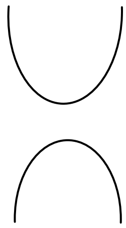
ให้ a และ b เป็นเส้นตรงใดๆ สองเส้นที่ตัดกันที่จุด V เป็นมุมแหลม α ให้เส้นตรง a และจุด V ตรึงอยู่กับที่ ผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นตรง b รอบเส้นตรง a (โดยหมุน α ระหว่างเส้นตรง a และ b มีขนาดคงตัว) เรียกว่า **กรวยกลมตรง** (right circular cone) ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะกรวยกรมตรงเท่านั้นและเรียกสั้นๆ ว่า **กรวย**เส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า **แกน**(axis) ของกรวย จุด V เรียกว่า จุดยอด (vertex) และเส้นตรง b ที่ผ่านจุด V ทำมุม α กับแกนของกรวย เรียกว่า **ตัวก่อกำเนิด** (generator) ของกรวย จุดยอด V แบ่งกรวยออกเป็นสองข้าง(nappes) ซึ่งอยู่คนละข้างของจุดยอด ดังรูป



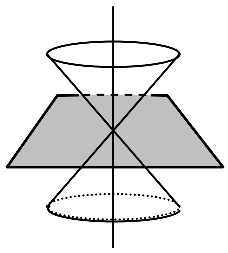
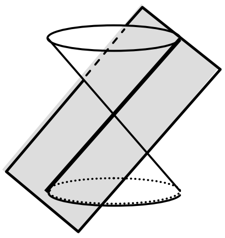
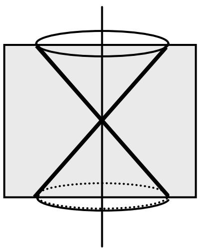
> **ภาคตัดกรวย** คือรูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย เส้นโค้ง ซึ่งได้แก่ วงกลม(circle) พาราโบลา(parabola) วงรี (ellipse)และไฮเพอร์โบลา(hyperbola)

ภาคตัดกรวย ที่ได้จากนำระนาบไปตัดกรวยกลมตรงโดยไม่ผ่านจุดยอดของกรวย จะได้ดังต่อไปนี้

รูประนาบที่ตัดกรวย	ลักษณะของระนาบที่ตัดกรวย	รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกรวย
1. 	ระนาบที่ตัดกรวยตั้งฉากกับแกนของกรวย	วงกลม 
2. 	ระนาบที่ตัดกรวยขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวยจะตัดกรวยข้างเดียว	พาราโบลา 

รูประนาบที่ตัดกรวย	ลักษณะของระนาบที่ตัดกรวย	รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกรวย
3. 	ระนาบที่ตัดกรวยทำมุมแหลมกับแกนของกรวยแต่ขนาดใหญ่กว่า α ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว	วงรี 
4. 	ระนาบที่ตัดกรวยขนานกับแกนของกรวยและตัดทั้งสองส่วนของกรวย	ไฮเพอร์โบลา 

ถ้าระนาบผ่านจุดยอดของกรวยรอยตัดของระนาบกับกรวยจะเป็นจุด หรือเส้นตรงเส้นหนึ่ง หรือเส้นตรงสองเส้นตัดกัน ซึ่งเรียกลักษณะดังกล่าวว่า **ภาคตัดกรวยลดรูป** (Degenerate conics) ดังรูป

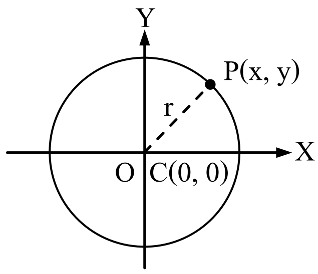
	ระนาบที่ตัดกรวยผ่านจุดยอดและตั้งฉากกับแกนของกรวยจะได้ จุด 1 จุด
	ระนาบที่ตัดกรวยผ่านจุดยอดและตัดตัวก่อกำเนิดของกรวยจะได้เส้นตรง 1 เส้น
	ระนาบที่ตัดกรวยผ่านจุดยอดและตัดทับแกนของกรวยจะได้เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

3.2.2 วงกลม (circle)

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงกลม

วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุดๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่ระยะทางคงตัว ที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัว เรียกว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม

กรณีที่ 1 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(0, 0) และรัศมียาว r หน่วย



จากรูป กำหนดให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนวงกลม

จากบทนิยาม จะได้ $CP = r$

เนื่องจาก $CP = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

ดังนั้น $\sqrt{x^2+y^2} = r$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $x^2+y^2 = r^2$

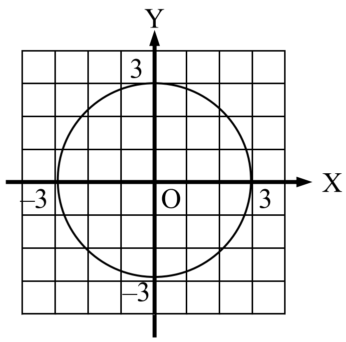
ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด(0, 0) และรัศมียาว r หน่วย

คือ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2+y^2 = r^2\}$

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด(0, 0) และรัศมียาว r หน่วย คือ $x^2+y^2 = r^2$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และรัศมียาว 3 หน่วย

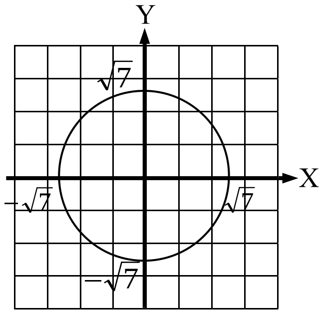


จะได้ความสัมพันธ์ คือ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2+y^2 = 9\}$

หรือมีสมการเป็น $x^2+y^2 = 9$

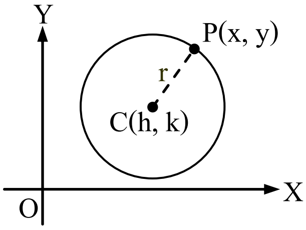
ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และรัศมียาว $\sqrt{7}$ หน่วย

จะได้ความสัมพันธ์ คือ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 7\}$ หรือมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 7$



หมายเหตุ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และรัศมียาว 1 หน่วย มีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$ เรียกว่า**วงกลมหนึ่งหน่วย** (unit circle)

กรณีที่ 2 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(h, k) และรัศมียาว r หน่วย



วิธีที่ 1 **จากรูป** กำหนดให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนวงกลม

จากบทนิยาม จะได้ $CP = r$

เนื่องจาก $CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

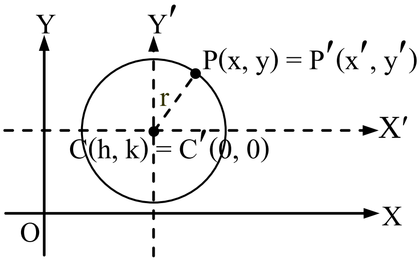
จะได้ $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

วิธีที่ 2 โดยเลื่อนแกนไปที่จุด C(h, k) จะได้พิกัดเมื่อเทียบกับแกนใหม่ของจุด C และจุด P ดังนี้

นั่นคือ จุด $C(h, k) = C'(0, 0)$ และจุด $P(x, y) = P'(x', y')$ ดังรูป



จากรูป จะได้สมการวงกลมเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $(x')^2 + (y')^2 = r^2$

แต่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$

จะได้สมการวงกลมเมื่อเทียบกับแกนเดิมคือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และรัศมียาว r หน่วยคือ

$\{(x, y) \in R \times R \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$ หรือ สมการ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด(h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จากสมการ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ เนื่องจาก h, k และ r เป็นค่าคงตัว

กำหนดให้ $-2h = D$, $-2k = E$ และ $h^2 + k^2 - r^2 = F$ เมื่อ D, E และ F เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น จะได้สมการวงกลมมีรูปทั่วไป คือ $\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (1, –2) และมีรัศมี 3 หน่วย

วิธีทำ สมวงกลมที่มีจุดศูนย์ที่ (h, k) รัศมี r หน่วย คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

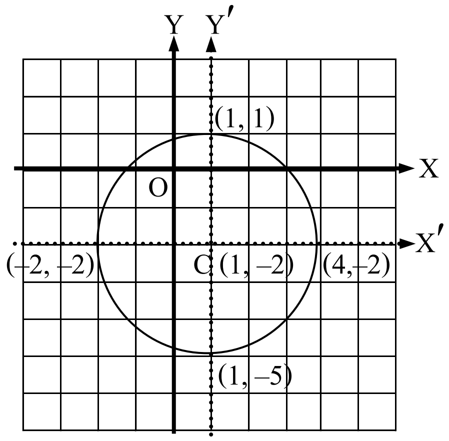
จากโจทย์ จะได้ $(h, k) = (1, -2)$ ซึ่ง $h = 1$, $k = -2$ และ $r = 3$

จะได้ สมการวงกลม $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$

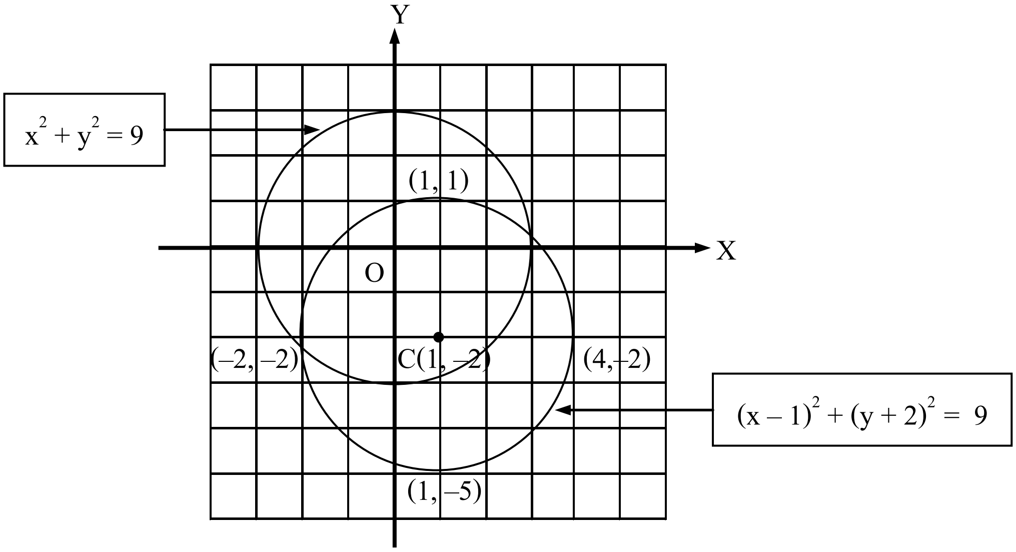
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$



จากตัวอย่างที่ 3 เราจะเขียนกราฟโดยการเลื่อนกราฟได้ดังนี้

นั่นคือเขียนกราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 9$ ก่อน แล้วเลื่อนกราฟนี้ให้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (1, –2) ดังรูป



ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ และ รัศมี $\frac{5}{4}$ หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $(h, k) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ และ $r = \frac{5}{4}$

จะได้ สมการวงกลม $(x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = (\frac{5}{4})^2$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{25}{16}$$

$$x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{15}{16} = 0$$

นำ 16 มาคูณตลอด จะได้ $16x^2 + 16y^2 - 48x + 16y + 15 = 0$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ $16x^2 + 16y^2 - 48x + 16y + 15 = 0$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (2, 3) และ ผ่านจุด (4, –1)

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ (h, k) = (2, 3) และ รัศมีของวงกลม เท่ากับระยะห่างระหว่าง ศูนย์กลางจุด (2, 3) กับจุดที่วงกลมผ่าน (4, -1)

จะได้ รัศมี $r = \sqrt{(2-4)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$

จะได้สมการวงกลม $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{20})^2$

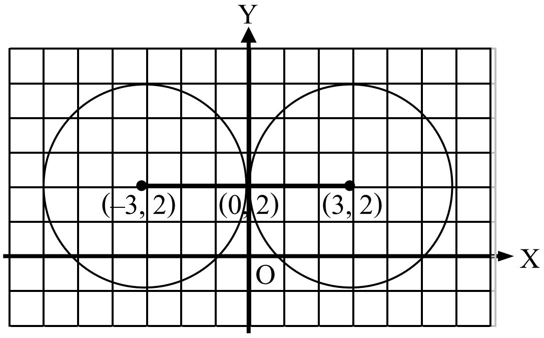
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 20$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาสมการวงกลมที่มีรัศมี 3 หน่วย และสัมผัสกับแกน Y ที่จุด (0, 2)

วิธีทำ เนื่องจาก วงกลมที่มีรัศมี 3 หน่วย และสัมผัสกับแกน Y ที่จุด (0, 2)
จะมีวงกลม 2 วง คือ วงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3, 2)
และอีกวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (–3, 2) ดังรูป



ซึ่งวงกลมวงแรกที่ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3, 2) รัศมี 3 หน่วย

มีสมการเป็น $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$$

และอีกวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (–3, 2) รัศมี 3 หน่วย

มีสมการเป็น $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$

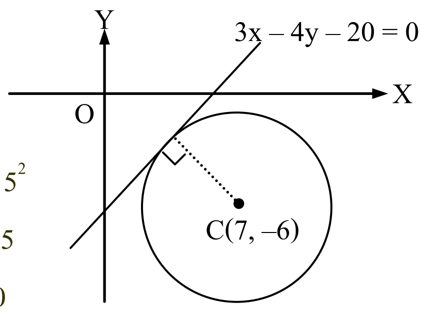
ดังนั้น สมการที่ต้องการคือ $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ หรือ $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (7, –6) และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$

วิธีทำ เนื่องจากส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมจะตั้งฉากกับเส้นสัมผัส
นั่นคือรัศมีจะเท่ากับระยะระหว่างจุด(7, –6) กับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$ ดังรูป

จะได้ $r = \dfrac{|3(7)+(-4)(-6)-20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$$= \frac{25}{5} = 5$$



จะได้สมการ $(x-7)^2 + (y+6)^2 = 5^2$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 12y + 36 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 12y + 60 = 0$$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ $x^2 + y^2 - 14x + 12y + 60 = 0$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาสมการซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–1, –3) และสัมผัสกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (–2, 4) กับ (2, 1)

วิธีทำ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (–2, 4) กับ (2, 1) คือ $y - 4 = \frac{4-1}{-2-2}(x+2)$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x+2)$$

หรือ $3x + 4y - 10 = 0$

และรัศมีของวงกลมคือ ระยะระหว่างจุด (–1, –3) กับเส้นตรง $3x + 4y - 10 = 0$

จะได้ $r = \frac{|3(-1)+4(-3)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$= \frac{25}{5} = 5$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

หรือ $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาสมการซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่ผ่านจุด (5, 3), (6, 2) และ (3, -1)

วิธีทำ จากสมการวงกลมรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

วงกลมผ่านจุด (5, 3) จะได้สมการ $5^2 + 3^2 + 5D + 3E + F = 0$

$5D + 3E + F = -34$ ....(1)

วงกลมผ่านจุด (6, 2) จะได้สมการ $6^2 + 2^2 + 6D + 2E + F = 0$

$6D + 2E + F = -40$ ....(2)

วงกลมผ่านจุด (3, –1) จะได้สมการ $3^2 + (-1)^2 + 3D - E + F = 0$

$3D - E + F = -10$ ....(3)

(2) – (1) จะได้ $D - E = -6$ ....(4)

(2) – (3) จะได้ $3D + 3E = -30$ และได้ $D + E = -10$ ....(5)

(4) + (5) จะได้ $2D = -16$ $\therefore$ $D = -8$

แทนค่า D ด้วย –8 ลงในสมการ (5) จะได้ $-8 + E = -10$

$\therefore$ $E = -2$

แทนค่า D ด้วย –8 และ E ด้วย –2 ลงในสมการ (3)

จะได้ $3(-8) - (-2) + F = -10$

$\therefore$ $F = 12$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

การหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

สมการซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จากสมการ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จะได้ $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2 = 0$ เนื่องจาก h, k และ r เป็นค่าคงตัว

กำหนดให้ $-2h = D, -2k = E$ และ $h^2+k^2-r^2 = F$ เมื่อ D, E และ F เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น จะได้สมการวงกลมมีรูปทั่วไป คือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$

จาก $-2h = D$ จะได้ $h = -\dfrac{D}{2}$ และ $-2k = E$ จะได้ $k = -\dfrac{E}{2}$

จะได้ จุดศูนย์กลางของวงกลม $(h, k) = (-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2})$

และจาก $h^2+k^2-r^2 = F$ จะได้ $r^2 = h^2+k^2-F$

$$r^2 = (-\frac{D}{2})^2+(-\frac{E}{2})^2 - F \quad \text{(แทนค่า h และ k)}$$

$$r^2 = \frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4} - F$$

$$r^2 = \frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)$$

$$\therefore \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$$

นั่นคือ สมการวงกลมที่อยู่ในรูป $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2})$

และมีรัศมี $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ หน่วย หรือ $r = \sqrt{(-\dfrac{D}{2})^2+(-\dfrac{E}{2})^2-F}$

การพิจารณาค่า D^2+E^2-4F

(1) ถ้า $D^2+E^2-4F > 0$ แล้ว $r > 0$ กราฟของสมการเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2})$

และมีรัศมีเท่ากับ $\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ หน่วย

(2) ถ้า $D^2+E^2-4F = 0$ แล้ว $r = 0$ กราฟของสมการเป็นจุด เช่น สมการ $x^2+y^2-2x+4y+5 = 0$

ซึ่ง $D = -2$, $E = 4$ และ $F = 5$ จะได้ $(-2)^2+4^2-4(5) = 0$ และ $r = 0$ กราฟเป็นจุด

(3) ถ้า $D^2+E^2-4F < 0$ แล้ว r ไม่เป็นจำนวนจริง เขียนกราฟไม่ได้ เช่น

สมการ $x^2+y^2+2x+4y+10 = 0$

ซึ่ง $D = 2$, $E = 4$ และ $F = 10$ จะได้ $2^2+4^2-4(10) = -20$ เขียนกราฟไม่ได้

ตัวอย่างที่ 10 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

วิธีที่ 1 จากสมการ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ ซึ่ง $D = -6,\ E = 4$ และ $F = -3$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}) = (\frac{6}{2}, -\frac{4}{2}) = (3, -2)$

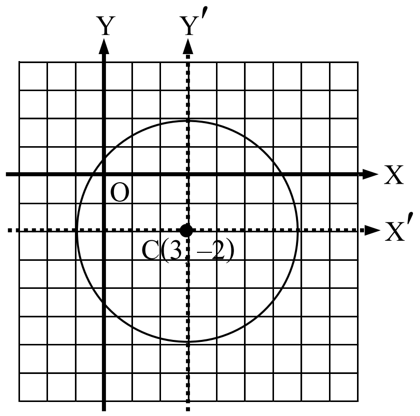
และรัศมี
$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 4^2 - 4(-3)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{36 + 16 + 12)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{64} \\ &= \frac{1}{2}(8) = 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, –2) และรัศมียาว 4 หน่วย

วิธีที่ 2 จากสมการ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ จัดให้อยู่ในรูป $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ จะได้
$$\begin{aligned} (x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) &= 3 \\ (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) &= 3 + 9 + 4 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 16 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 16 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3,– 2) และรัศมียาว 4 หน่วย



ตัวอย่างที่ 11 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$

วิธีที่ 1 จากสมการ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$

นำ 2 มาหารตลอด

จะได้ $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y + \frac{3}{2} = 0$

ซึ่ง $D = -\frac{3}{2}$, $E = 2$ และ $F = \frac{3}{2}$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}) = \left(-\frac{-\frac{3}{2}}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (\frac{3}{4}, -1)$

และรัศมี

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(-\frac{D}{2})^2 + (-\frac{E}{2})^2 - F} \\
&= \sqrt{(\frac{3}{4})^2 + (-1)^2 - \frac{3}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{9}{16} + 1 - \frac{3}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{9 + 16 - 24}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{3}{4}, -1)$ และรัศมียาว $\frac{1}{4}$ หน่วย

วิธีที่ 2 จากสมการ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$

นำ 2 มาหารตลอด

จะได้ $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y + \frac{3}{2} = 0$

จัดให้อยู่ในรูป $(x\ \ h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์

จะได้

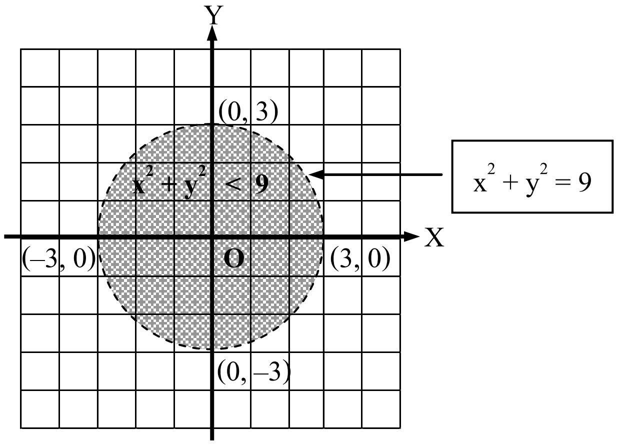
$$
\begin{aligned}
(x^2 - \frac{3}{2}x) + (y^2 + 2y) &= -\frac{3}{2} \\
(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) + (y^2 + 2y + 1) &= -\frac{3}{2} + \frac{9}{16} + 1 \\
(x - \frac{3}{4})^2 + (y + 1)^2 &= \frac{1}{16} \\
(x - \frac{3}{4})^2 + (y + 1)^2 &= (\frac{1}{4})^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{3}{4}, -1)$ และรัศมียาว $\frac{1}{4}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 12 จงเขียนกราฟของบริเวณซึ่งกำหนดโดยเซตต่อไปนี้

(1) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 9\}$

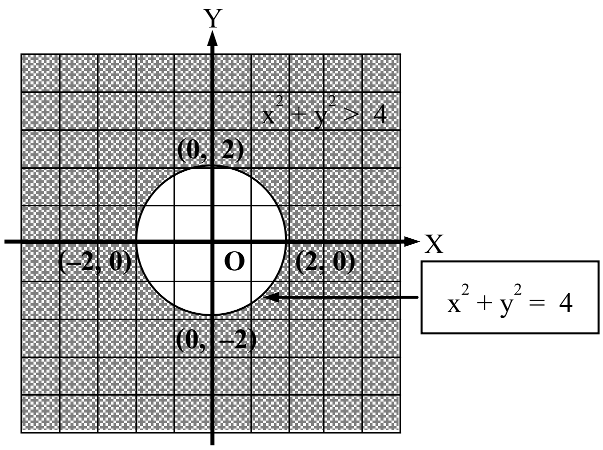
วิธีทำ จากอสมการ $x^2 + y^2 < 9$



ถ้า $x^2 + y^2 = 9$ เป็นสมการวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมียาว 3 หน่วย จะได้กราฟของอสมการ $x^2 + y^2 < 9$ นี้ คือบริเวณส่วนที่แรเงาซึ่งอยู่ในวงกลมดังรูป

(2) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

วิธีทำ จากอสมการ $x^2 + y^2 \geq 4$

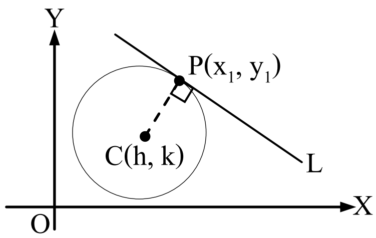


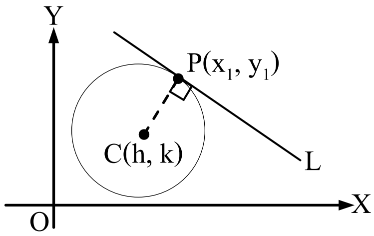
ถ้า $x^2 + y^2 = 4$ เป็นสมการวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมียาว 2 หน่วย จะได้กราฟของอสมการ $x^2 + y^2 \geq 4$ นี้ คือบริเวณส่วนที่แรเงาซึ่งอยู่นอกวงกลม และรวมจุดทุกจุดที่เป็นกราฟของสมการวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ นี้ด้วย ดังรูป

การหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม

กรณีที่ 1 ทราบจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุดสัมผัส เราสามารถหาสมการเส้นสัมผัสวงกลมได้ดังนี้

สมมุติให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ C(h, k) และมีเส้นตรง L (ซึ่งไม่ขนานกับแกน Y) สัมผัสกับวงกลมนี้ที่จุด $P(x_1, y_1)$เส้นตรง L จะตั้งฉากกับรัศมี CP ที่จุดสัมผัส P ดังรูป





วิธีการหาสมการของเส้นตรง L มีดังนี้

(1) ความชันของ CP $= m = \dfrac{y_1 - k}{x_1 - h}$

(2) จะได้ ความชันของเส้นตรง L $= -\dfrac{1}{m}$ $[\because m(-\dfrac{1}{m}) = -1]$

(3) จะได้สมการเส้นสัมผัส L คือ $y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ C(–2, 7) โดยสัมผัสที่จุด P(1, 3)

วิธีทำ จากโจทย์ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ C(–2, 7) และเส้นตรงสัมผัสกับวงกลมที่จุด P(1, 3)

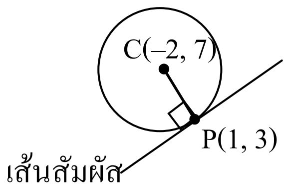
จะได้ ความชันของรัศมี CP $= \dfrac{3-7}{1+2} = -\dfrac{4}{3}$ $\therefore$ ความชันของเส้นสัมผัส $= \dfrac{3}{4}$

จากสมการเส้นสัมผัส $y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$ ซึ่ง $x_1 = 1$, $y_1 = 3$ และ $-\dfrac{1}{m} = \dfrac{3}{4}$

จะได้สมการเส้นสัมผัส คือ $y - 3 = \dfrac{3}{4}(x - 1)$

$$4y - 12 = 3x - 3$$

$$3x - 4y + 9 = 0$$



ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสที่ต้องการ คือ $3x - 4y + 9 = 0$

กรณีที่ 2 ทราบสมการของวงกลม และจุดสัมผัส สามารถหาสมการเส้นสัมผัสได้ตามวิธีดังกล่าว หรือหาได้ดังต่อไปนี้

จัดสมการให้อยู่ในรูป $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ และเส้นตรง L สัมผัสวงกลมที่จุด P(x_1, y_1)

จะได้สมการเส้นตรง L คือ $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดสมการ $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลมนี้ ที่จุด (–4, 5)

วิธีทำ จากโจทย์สมการวงกลม $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 2)

และจุดสัมผัสอยู่ที่ (–4, 5) จะได้ $h = 0$, $k = 2$, $x_1 = -4$, $y_1 = 5$ และ $r^2 = 25$

จากสมการเส้นสัมผัส $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$

จะได้สมการเส้นสัมผัส $(-4 - 0)(x - 0) + (5 - 2)(y - 2) = 25$

$$-4x + 3y - 6 = 25$$

$$4x - 3y + 31 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสที่ต้องการ คือ $4x - 3y + 31 = 0$

ใบกิจกรรมที่ 3.2.2

1. จงหาสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และรัศมียาว 6 หน่วย

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และรัศมียาว $\sqrt{5}$ หน่วย

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 3) และรัศมียาว 4 หน่วย

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2. จงแสดงว่าสมการต่อไปนี้เป็นสมการวงกลม พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

(1) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(2) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(3) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

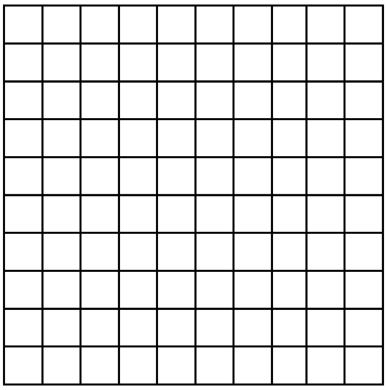
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

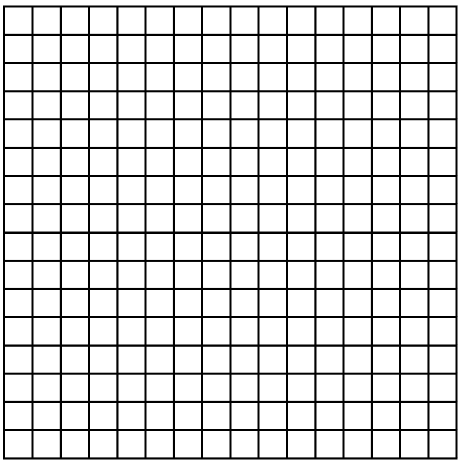
……………………………………………………………………………………………………

3. จงเขียนกราฟของบริเวณซึ่งกำหนดโดยเซตต่อไปนี้

(1) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$



(2) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 25\}$



4. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และวงกลมนี้ผ่านจุด (–3, 4)

....

....

....

....

5. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางที่จุด (–1, 2) และ (5, 10)

....

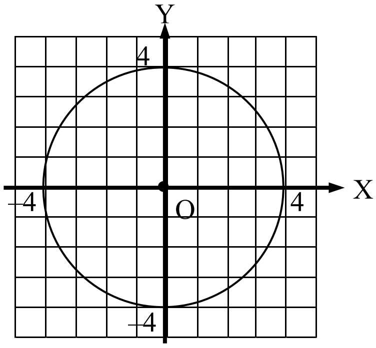
....

....

....

6. จงหาสมการวงกลมจากกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1)



....

....

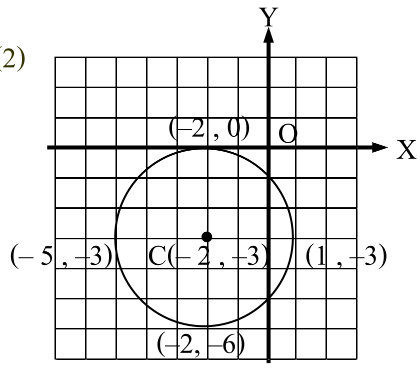
....

....

....

....

(2)



....

....

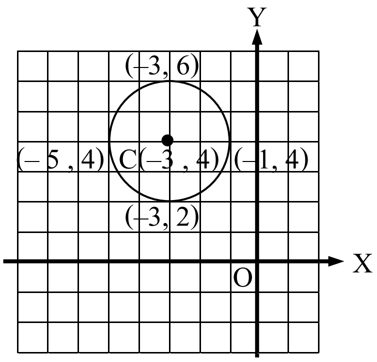
....

....

....

....

(3)



....

....

....

....

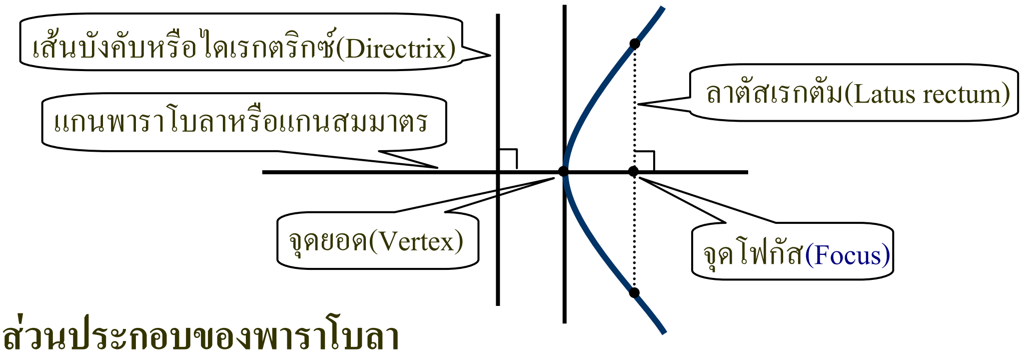
....

....

3.2.3 พาราโบลา (Parabola)

บทนิยาม พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งบนระนาบ และจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเส้นนั้น เป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

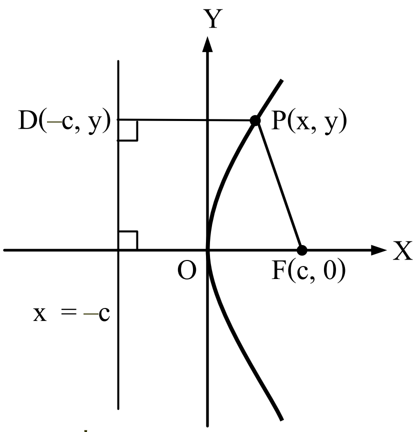
ลักษณะของพาราโบลา



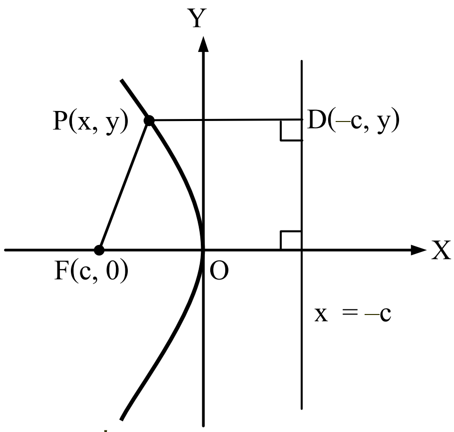
ส่วนประกอบของพาราโบลา

1. จุดคงที่ คือ จุดโฟกัสของพาราโบลา
2. เส้นตรงคงที่ คือเส้นบังคับหรือไดเรกตริกซ์(Directrix)
3. เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัส จุดยอดและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์คือ แกนพาราโบลา หรือแกนสมมาตร
4. จุดที่แกนพาราโบลาตัดกับโค้งของพาราโบลา คือ จุดยอด(Vertex) ของพาราโบลา
5. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนพาราโบลาโดยจุดปลายทั้งสองอยู่บนโค้งของพาราโบลาคือ ลาตัสเรกตัม(Latus rectum) ซึ่งเรียกว่า **คอร์ด**(chord) ของพาราโบลา

1. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด(0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (c, 0) ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = -c$ และมีแกน X เป็น แกนของพาราโบลา ดังรูป



เมื่อ $c > 0$ เปิดทางขวา



เมื่อ $c < 0$ เปิดทางซ้าย

กำหนดให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนพาราโบลา และ PD ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D(– c, y)

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = |x-(-c)|$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$$

ดังนั้น $y^2 = 4cx$

นั่นคือ สมการพาราโบลา $y^2 = 4cx$

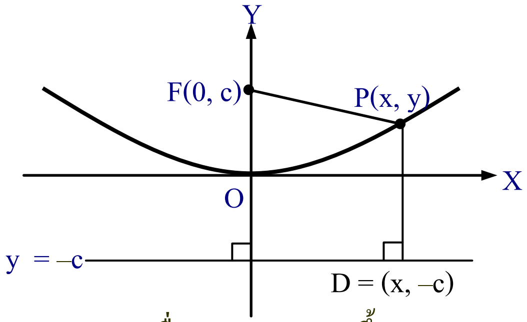
มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด(c, 0)

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = -c$ และมีแกน X เป็นแกนของพาราโบลา

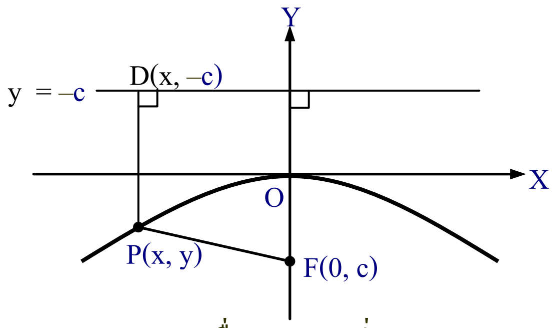
ถ้า $c > 0$ แล้ว $y^2 = 4cx$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟทางขวา

ถ้า $c < 0$ แล้ว $y^2 = 4cx$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟเปิดทางซ้าย

2. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด(0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, c) ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = -c$ และมีแกน Y เป็นแกนของพาราโบลา ดังรูป



เมื่อ $c > 0$ หงายขึ้น



เมื่อ $c < 0$ คว่ำลง

กำหนดให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนพาราโบลา และ PD ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D(x, –c)

จากบทนิยาม จะได้ $PF = PD$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = |y - (-c)|$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2$$

ดังนั้น $x^2 = 4cy$

นั่นคือ สมการพาราโบลา $x^2 = 4cy$

จุดศยอดอยู่ที่จุด(0, 0) โฟกัสอยู่ที่จุด(0, c)

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = -c$ และมีแกน Y เป็นแกนของพาราโบลา

ถ้า $c > 0$ แล้ว $x^2 = 4cy$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟหงายขึ้น

ถ้า $c < 0$ แล้ว $x^2 = 4cy$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟคว่ำลง

หมายเหตุ 1. แกนของพาราโบลา(แกนสมมาตร)จะผ่านจุดยอดและจุดโฟกัส

2. ระยะจากจุดยอดไปยังโฟกัสเท่ากับระยะจากจุดยอดไปยังไดเรกตริกซ์ ซึ่งต่างก็เท่ากับ $|c|$ หน่วย

3. ความยาวของลาตัสเรกตัม(Latus rectum) เท่ากับ $|4c|$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) จุดโฟกัสอยู่ที่ (5, 0) และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ (5, 0) และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน X (เส้นตรง $y = 0$)

$c = 5$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา

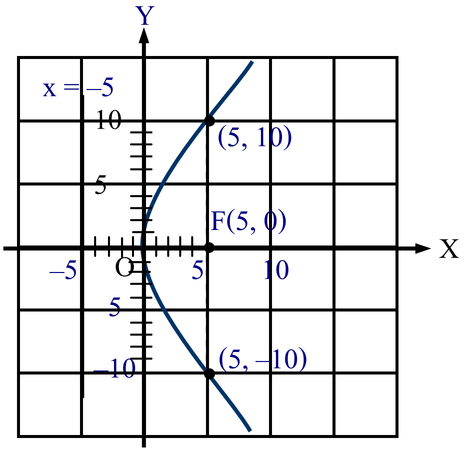
ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -5$

ลาตัสเรกตัมยาว $|4(5)| = 20$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$

จะได้ สมการ $y^2 = 4(5)x$

ดังนั้นสมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $y^2 = 20x$



(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ (–3, 0) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = 3$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ (–3, 0) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = 3$

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน X (เส้นตรง $y = 0$)

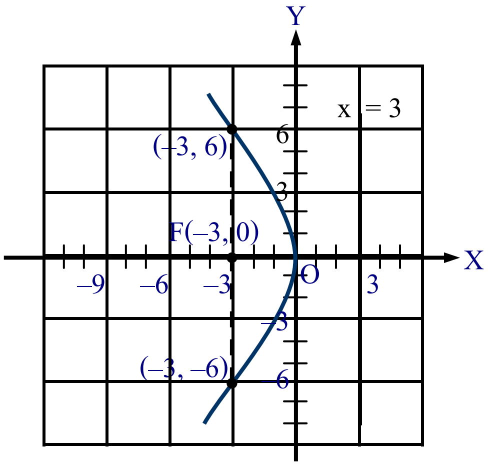
$c = -3$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) ลาตัสเรกตัมยาว $|4(-3)| = 12$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$

จะได้ สมการ $y^2 = 4(-3)x$

ดังนั้นสมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $y^2 = -12x$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมของการพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, 5) และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, 5) และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน Y (เส้นตรง $x = 0$)

$c = 5$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น

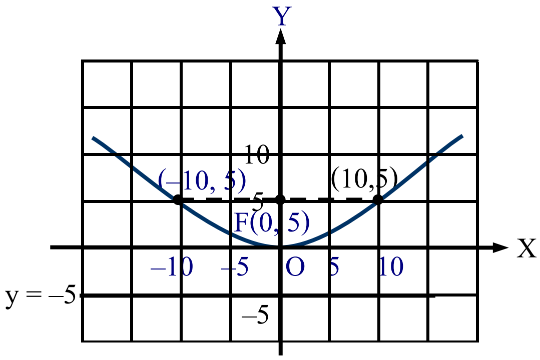
ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -5$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(5)| = 20$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(5)y$

ดังนั้น สมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $x^2 = 20y$



(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, – 3) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 3$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, –3) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 3$

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน Y (เส้นตรง $x = 0$)

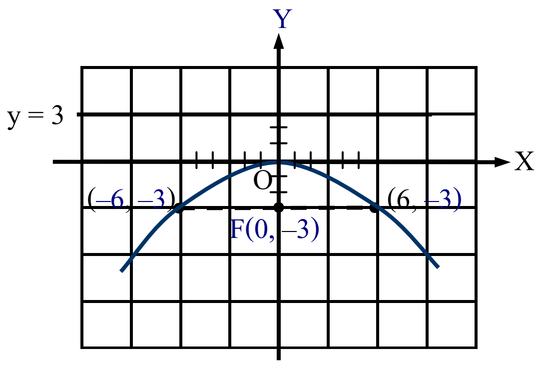
$c = -3$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำลง จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-3)| = 12$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(-3)y$

ดังนั้น สมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $x^2 = -12y$



ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -\frac{3}{4}$ และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

วิธีทำ จากโจทย์ ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -\frac{3}{4}$ และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน Y (เส้นตรง $x = 0$)

$c = \frac{3}{4}$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น

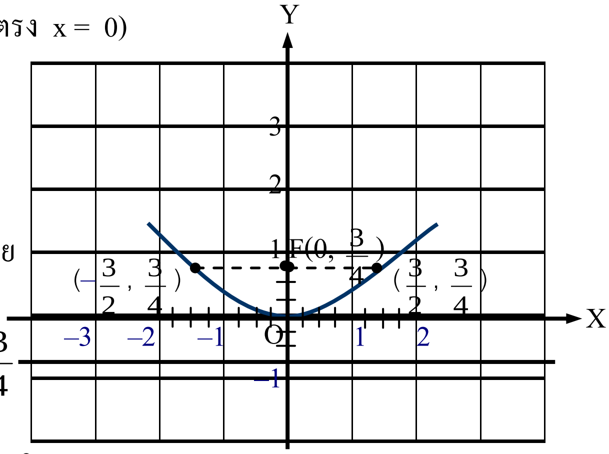
จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \frac{3}{4})$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(\frac{3}{4})| = 3$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(\frac{3}{4})y$

ดังนั้น สมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $x^2 = 3y$



(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-\frac{1}{2}, 0)$ และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = \frac{1}{2}$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-\frac{1}{2}, 0)$ และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = \frac{1}{2}$

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน X (เส้นตรง $y = 0$)

$c = -\frac{1}{2}$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

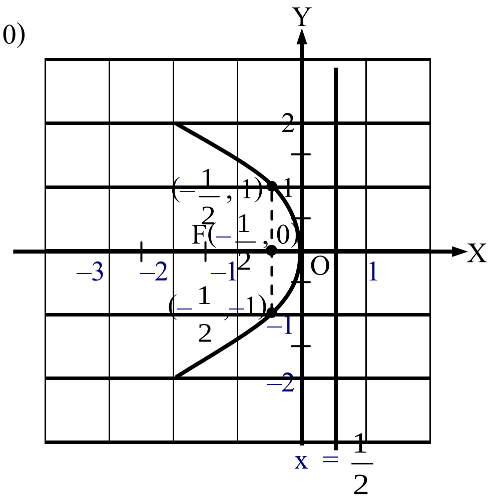
จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-\frac{1}{2})| = 2$ หน่วย

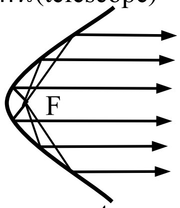
สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$

จะได้ สมการ $y^2 = 4(-\frac{1}{2})x$

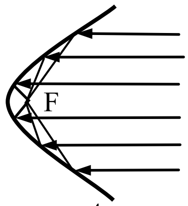
ดังนั้น สมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $y^2 = -2x$



แสงจากแหล่งกำเนิดที่โฟกัสของพื้นผิวทรงพาราโบลา(มีภาคตัดขวางเป็นพาราโบลา) เมื่อตกกระทบพื้นผิวแสงสะท้อนจะขนานกับแกนของพาราโบลา ดังนั้นกระจกเงาทรงพาราโบลาจะสะท้อนแสงเป็นลำแสงขนาน(**ดังแสดงในรูป ก**) ในทางกลับกันแสงที่พุ่งเข้ามายังกระจกเงาพาราโบลาในทิศทางที่ขนานกับแกนของกระจกเงาผิวของกระจกเงาจะสะท้อนแสงไปรวมกันที่จุดโฟกัส (**ดังแสดงในรูป ข**) หลักการดังกล่าวนี้ใช้ได้กับคลื่นด้วยสมบัติการสะท้อนของพาราโบลานี้นำไปใช้ในการออกแบบอุปกรณ์สะท้อนแสง เช่น โคมไฟ กล้องโทรทรรศน์(telescope) เป็นต้น



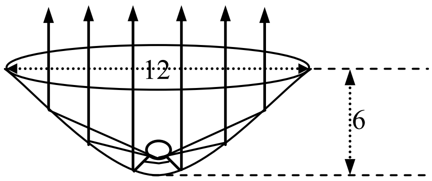
รูป ก

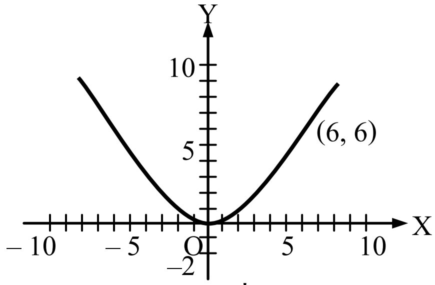


รูป ข

ตัวอย่างที่ 4 การหาโฟกัสของอุปกรณ์ส่องหาวัตถุ

อุปกรณ์ส่องหาวัตถุมีโคมสะท้อนแสงทรงพาราโบลา กว้าง 12 นิ้วและลึก 6 นิ้ว ดังรูป ถ้าต้องการให้ไส้หลอดไฟอยู่ที่โฟกัสของโคมเพื่อให้ผิวโคมไฟสะท้อนแสงเป็นลำขนานกับแกนของโคมควรให้ไส้หลอดไฟอยู่ห่างจากจุดยอดของโคมสะท้อนแสงเท่าใด





วิธีทำ วางภาคตัดกรวยรูปพาราโบลาของโคมบนระนาบพิกัดฉากให้จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) และแกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y (ในที่นี้คือแกน Y)

จะได้สมการพาราโบลาอยู่ในรูปแบบ $x^2 = 4cy$

จากกราฟจะเห็นว่าจุด (6, 6) อยู่บนพาราโบลา เราจะใช้จุดนี้หาค่า c

แทนค่า x ด้วย 6 และแทนค่า y ด้วย 6 ลงในสมการ $x^2 = 4cy$

จะได้ $6^2 = 4c(6)$

$36 = 24c$

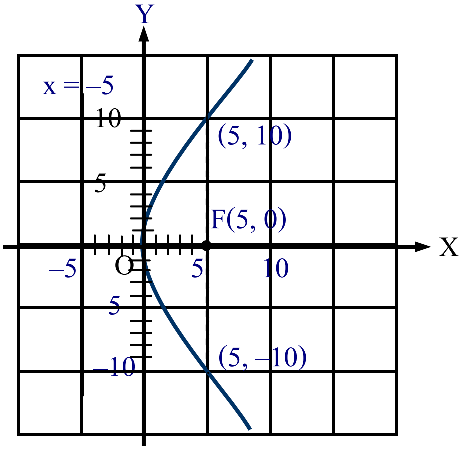
$c = \frac{3}{2}$

โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, \frac{3}{2})$ นั่นคือ ระยะระหว่างจุดยอดและโฟกัสเท่ากับ $\frac{3}{2}$ หรือ 1.50 นิ้ว

ดังนั้น ควรให้ไส้หลอดไฟอยู่ห่างจากจุดยอดของโคมสะท้อนแสง 1.50 นิ้ว

ตัวอย่างที่ 5 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $y^2 = 20x$



วิธีทำ จากสมการ $y^2 = 20x$

จะได้ $y^2 = 4(5)x$

แสดงว่า จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

แกนพาราโบลาคือ แกน X

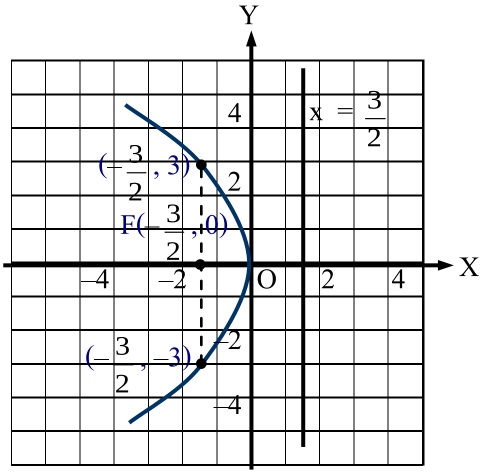
c = 5 เป็นกราฟพาโบลาเปิดทางขวา

จุดโฟกัสอยู่ที่ (5, 0)

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = -5$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(5)| = 20$ หน่วย

(2) $y^2 = -6x$



วิธีทำ จากสมการ $y^2 = -6x$

จะได้ $y^2 = 4(-\frac{3}{2})x$

แสดงว่า จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

แกนพาราโบลาคือ แกน X

$c = -\frac{3}{2}$ เป็นกราฟพาโบลาเปิดทางซ้าย

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-\frac{3}{2}, 0)$

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = \frac{3}{2}$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-\frac{3}{2})| = 6$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $x^2 = 6y$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 = 6y$

จะได้ $x^2 = 4(\frac{3}{2})y$

แสดงว่า จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

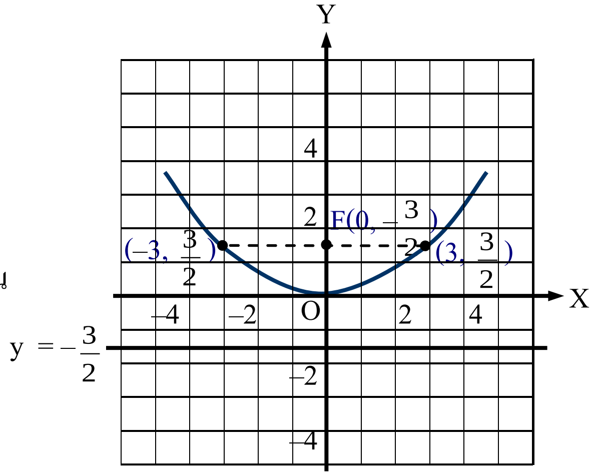
แกนพาราโบลาคือ แกน Y

$c = \frac{3}{2}$ เป็นกราฟพาโบลาหงายขึ้น

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \frac{3}{2})$

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = -\frac{3}{2}$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(\frac{3}{2})| = 6$ หน่วย



(2) $x^2 = -10y$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 = -10y$

จะได้ $x^2 = 4(-\frac{5}{2})y$

แสดงว่า จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

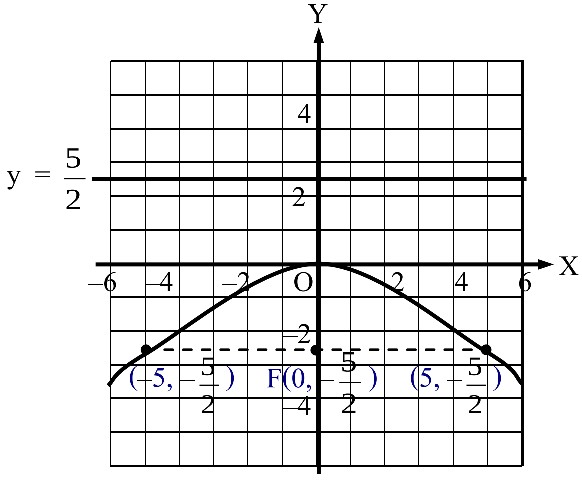
แกนสมพาราโบลาคือ แกน Y

$c = -\frac{5}{2}$ เป็นกราฟพาโบลาคว่ำลง

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -\frac{5}{2})$

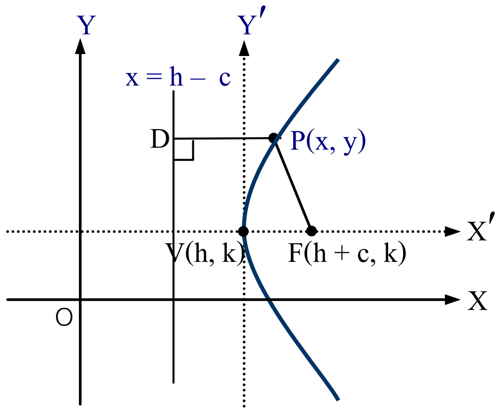
ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = \frac{5}{2}$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-\frac{5}{2})| = 10$ หน่วย

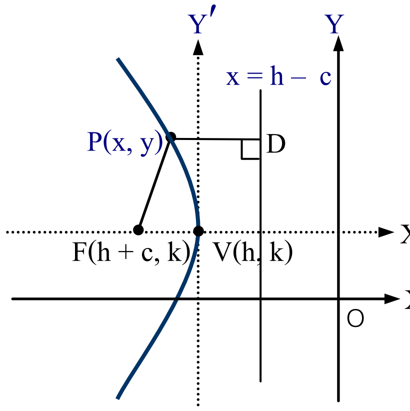


การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด(h, k) และมีแกนขนานกับแกน X หรือขนานกับแกน Y

1. เมื่อแกนของพาราโบลาขนานกับแกน X



เมื่อ $c > 0$ เปิดทางขวา



เมื่อ $c < 0$ เปิดทางซ้าย

กำหนดให้ V(h, k) เป็นจุดยอด และ จุดโฟกัสอยู่ที่ F(h + c, k) เมื่อเลื่อนแกนไปที่จุด (h, k) จะได้จุดยอดและโฟกัสของพาราโบลาเมื่อเทียบกับ**แกนใหม่**มีพิกัดเป็น (0, 0) และ (c, 0) ตาลำดับ

ถ้าให้ $P(x', y')$ เป็นพิกัดของจุดบนพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ จะได้สมการของพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $(y')^2 = 4cx'$

แต่ $y' = y - k$ และ $x' = x - h$ 2 3

ดังนั้นจะได้สมการพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนเดิมคือ $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

นั่นคือ สมการพาราโบลา $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

มีจุดยอดอยู่ที่ (h, k)

โฟกัสอยู่ที่จุด (h +c, k)

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = h - c$

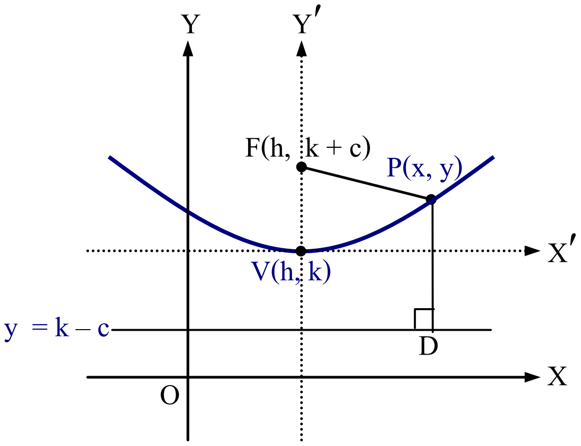
แกนของพาราโบลาขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = k$

ความยาวของลาตัสเรกตัม(Latus rectum) เท่ากับ $|4c|$ หน่วย

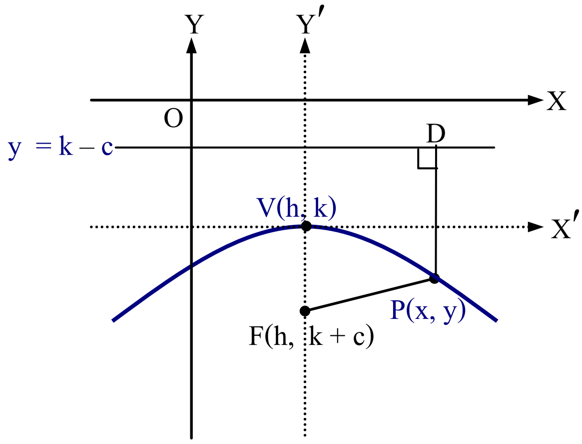
เมื่อ $c > 0$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา

และ $c < 0$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

2. เมื่อแกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y



เมื่อ c > 0 หงายขึ้น



เมื่อ c < 0 คว่ำลง

กำหนดให้ V(h, k) เป็นจุดยอด และ จุดโฟกัสอยู่ที่ F(h , k + c) เมื่อเลื่อนแกนไปที่จุด (h, k) จะได้จุดยอด และโฟกัสของพาราโบลาเมื่อเทียบกับ**แกนใหม่**มีพิกัดเป็น (0, 0) และ (0, c) ตาลำดับ

ถ้าให้ $P(x', y')$ เป็นพิกัดของจุดบนพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ จะได้สมการของพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $(x')^2 = 4cy'$

แต่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$

ดังนั้นจะได้สมการพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนเดิมคือ $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

นั่นคือ สมการพาราโบลา $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

มีจุดยอดอยู่ที่ (h, k)

โฟกัสอยู่ที่จุด (h , k + c)

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = k - c$

แกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = h$

ความยาวของลาตัสเรกตัม(Latus rectum) เท่ากับ $|4c|$ หน่วย

เมื่อ $c > 0$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น

และ $c < 0$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำลง

ตัวอย่างที่ 7 จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) จุดยอดอยู่ที่ $(-2, 3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(1, 3)$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ $V(-2, 3) = V(h, k)$ จะได้ $h = -2$, $k = 3$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h + c, k) = F(1, 3)$

จะได้ $h + c = 1$ ซึ่ง $-2 + c = 1$ $\therefore c = 3$

แกนพาราโบลาขนานกับ X คือ เส้นตรง $y = 3$ $(\because y = k)$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -5$ $(\because x = h - c = -2 - 3 = -5)$

เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา $(\because c > 0)$

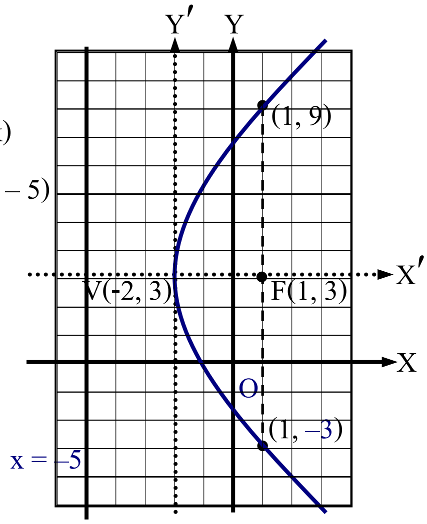
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(3)| = 12$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

จะได้ สมการ $(y - 3)^2 = 4(3)(x + 2)$

$$y^2 - 6y + 9 = 12x + 24$$

$$y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$$



ดังนั้น สมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$

(2) จุดยอดอยู่ที่ $(-3, -4)$ และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = 2$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ $V(-3, -4) = V(h, k)$ จะได้ $h = -3$, $k = -4$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = 2$

จะได้ $h - c = 2$ ดังนั้น $-3 - c = 2$ $\therefore c = -5$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน X คือ เส้นตรง $y = -4$ $(\because y = k)$

เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย $(\because c < 0)$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h + c, k) = F(-3 - 5, -4) = F(-8, -4)$

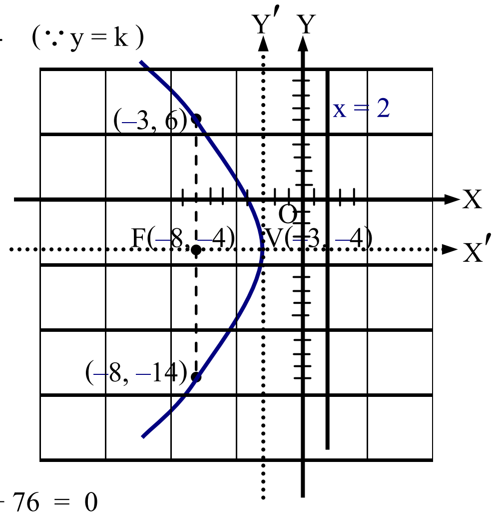
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-5)| = 20$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

จะได้ สมการ $(y + 4)^2 = 4(-5)(x + 3)$

$$y^2 + 8y + 16 = -20x - 60$$

$$y^2 + 8y + 20x + 76 = 0$$



ดังนั้น สมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $y^2 + 8y + 20x + 76 = 0$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

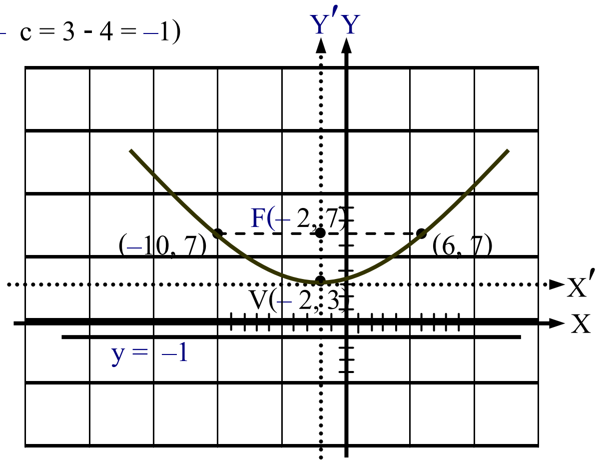
(1) จุดยอดอยู่ที่ $(-2, 3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-2, 7)$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ $V(-2, 3) = V(h, k)$ จะได้ $h = -2$, $k = 3$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(-2, 7) = F(h, k + c)$ จะได้ $k + c = 7$ ซึ่ง $3 + c = 7 \therefore c = 4$

แกนพาราโบลาขนานกับ Y คือ เส้นตรง $x = -2$ $(\because x = h)$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -1$ $(\because y = k - c = 3 - 4 = -1)$



เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น $(\because c > 0)$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(4)| = 16$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

จะได้ สมการ $(x + 2)^2 = 4(4)(y - 3)$

$x^2 + 4x + 4 = 16y - 48$

$x^2 + 4x - 16y + 52 = 0$

ดังนั้น สมการพาราโบลาที่ต้องการคือ $x^2 + 4x - 16y + 52 = 0$

(2) จุดยอดอยู่ที่ $(4, -3)$ แกนของพาราโบลาคือ เส้นตรง $x = 4$ และลาตัสเรกตัมยาว 8 หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ $V(4, -3) = V(h, k)$ จะได้ $h = 4$ และ $k = -3$

และลาตัสเรกตัมยาว 8 หน่วย จะได้ $|4c| = 8$ $\therefore c = \pm 2$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน Y คือ เส้นตรง $x = 4$

สมการอยู่ในรูป $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

จะได้ สมการ $(x - 4)^2 = 4(2)(y + 3)$

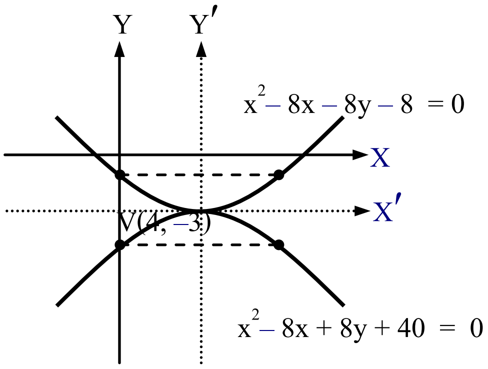
$x^2 - 8x + 16 = 8y + 24$

$x^2 - 8x - 8y - 8 = 0$

หรือสมการ $(x - 4)^2 = 4(-2)(y + 3)$

$x^2 - 8x + 16 = -8y - 24$

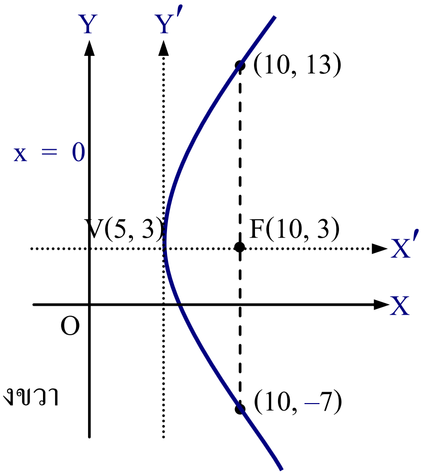
$x^2 - 8x + 8y + 40 = 0$



ดังนั้น สมการที่ต้องการคือ $x^2 - 8x - 8y - 8 = 0$ หรือ $x^2 - 8x + 8y + 40 = 0$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $y^2 - 6y - 20x + 109 = 0$



วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 6y - 20x + 109 = 0$

จะได้ $y^2 - 6y = 20x - 109$

$y^2 - 6y + 9 = 20x - 109 + 9$

$y^2 - 6y + 9 = 20x - 100$

$(y-3)^2 = 20(x-5)$

$(y-3)^2 = 4(5)(x-5)$

ดังนั้น จะได้ $h = 5, k = 3$ และ $c = 5$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา

จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(5, 3)$

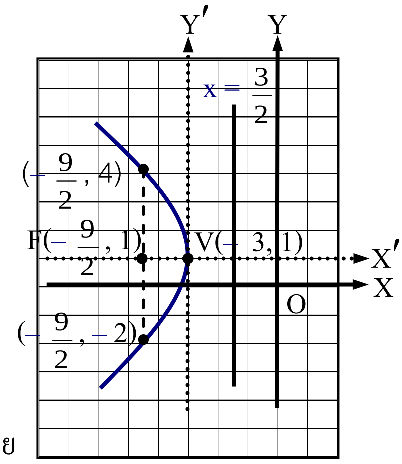
แกนพาราโบลาขนานกับแกน X คือ เส้นตรง $y = 3$ $(\because y = k)$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h + c, k) = F(5 + 5, 3) = F(10, 3)$

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = 0$ คือ แกน Y $(\because x = h - c = 5 - 5 = 0)$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(5)| = 20$ หน่วย

(2) $y^2 - 2y + 6x + 19 = 0$



วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 2y + 6x + 19 = 0$

จะได้ $y^2 - 2y = -6x - 19$

$y^2 - 2y + 1 = -6x - 19 + 1$

$y^2 - 2y + 1 = -6x - 18$

$(y-1)^2 = -6(x+3)$

$(y-1)^2 = 4(-\frac{3}{2})(x+3)$

จะได้ $h = -3,\ k = 1$ และ $c = -\frac{3}{2}$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(-3, 1)$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน X คือ เส้นตรง $y = 1$ $(\because y = k)$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h + c, k) = F(-3 - \frac{3}{2}, 1) = F(-\frac{9}{2}, 1)$

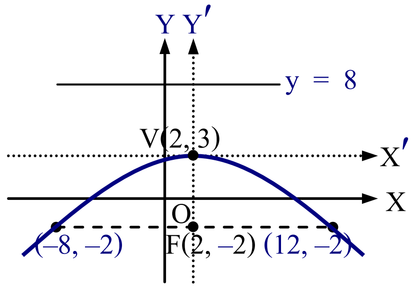
ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = -\frac{3}{2}$ $(\because x = h - c = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2})$

ลาตัสเรกตัมยาว $|4(-\frac{3}{2})| = 6$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 10 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$



จะได้ $x^2 - 4x = -20y + 56$

$x^2 - 4x + 4 = -20y + 56 + 4$

$x^2 - 4x + 4 = -20y + 60$

$(x-2)^2 = 4(-5)(y-3)$

ดังนั้น จะได้ $h = 2,\ k = 3$ และ $c = -5$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำลง

จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(2, 3)$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน Y คือ เส้นตรง $x = 2$ $(\because x = h)$

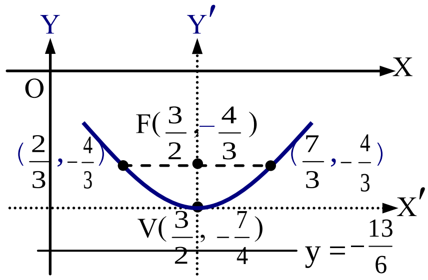
จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k+c) = F(2, 3-5) = F(2, -2)$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 8$ $(\therefore y = k - c = 3 - (-5) = 8$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-5)| = 20$ หน่วย

(2) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$



จะได้ $3x^2 - 9x = 5y + 2$

$x^2 - 3x = \frac{5}{3}y + \frac{2}{3}$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{5}{3}y + \frac{2}{3} + \frac{9}{4}$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{5}{3}y + \frac{35}{12}$

$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{3}(y + \frac{7}{4})$

$(x - \frac{3}{2})^2 = 4(\frac{5}{12})(y + \frac{7}{4})$

ดังนั้น จะได้ $h = \frac{3}{2},\ k = -\frac{7}{4}$ และ $c = \frac{5}{12}$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น

จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4})$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน Y คือ เส้นตรง $x = \frac{3}{2}$ $(\because x = h)$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k+c) = F(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4} + \frac{5}{12}) = F(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3})$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 8$ $(\therefore y = k - c = -\frac{7}{4} - \frac{5}{12} = -\frac{26}{12} = -\frac{13}{6}$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(\frac{5}{12})| = \frac{5}{3}$ หน่วย

ใบกิจกรรมที่ 3.2.3

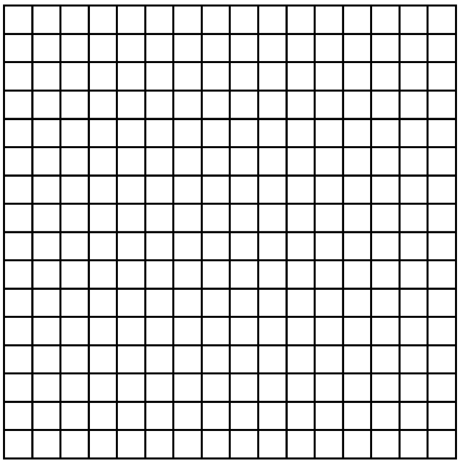
1. จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟด้วย

(1) จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) และโฟกัสอยู่ที่จุด (6, 0)

(2) จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) และโฟกัสอยู่ที่จุด (0, –3)

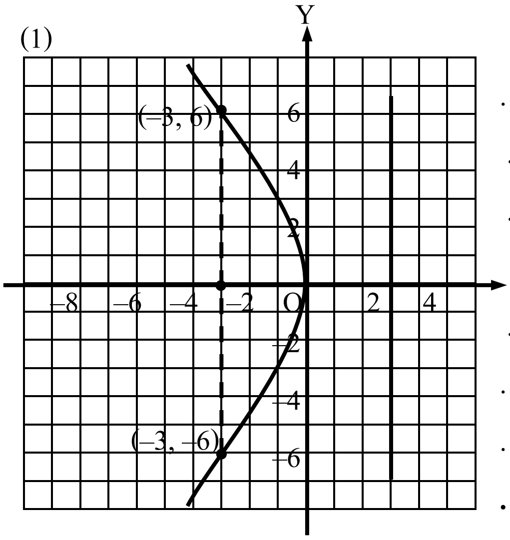
(3) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 3$ และจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0)

(4) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง y = –4 และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

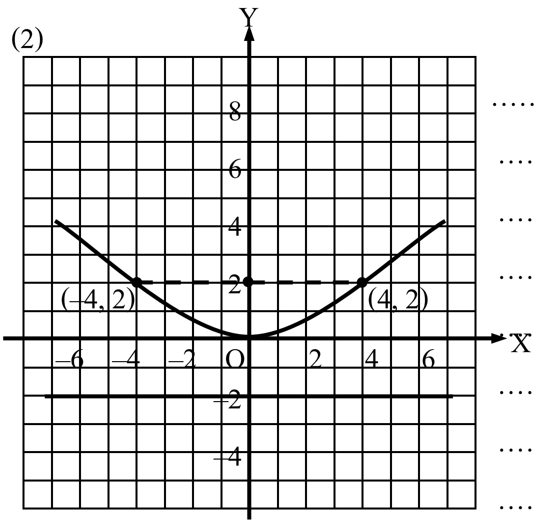


2. จงหาสมการของพาราโบลา จุดยอด จุดโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวลาตัสเรกตัม จากกราฟที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1)



(2)



3. จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $y^2 = 4x$

....
....
....
....
....
....
....
....

(2) $y^2 = -8x$

....
....
....
....
....
....
....
....

(3) $x^2 = 12y$

....
....
....
....
....
....
....
....

4. จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟด้วย

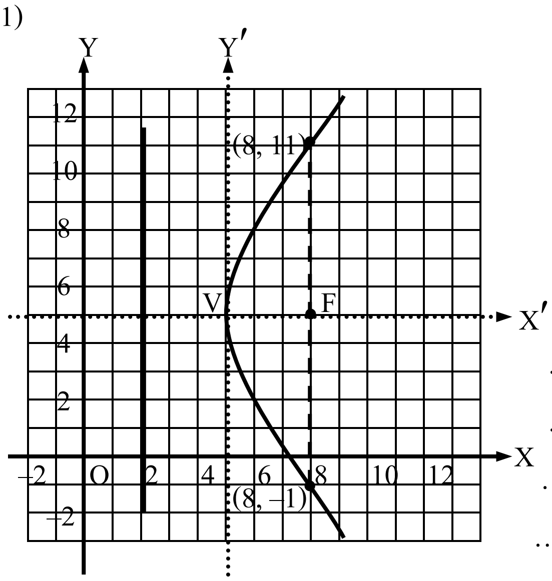
(1) จุดยอดอยู่ที่ (2, 0) และโฟกัสอยู่ที่จุด (6, 0)

(2) จุดยอดอยู่ที่ (2, 3) และโฟกัสอยู่ที่จุด (2, –6)

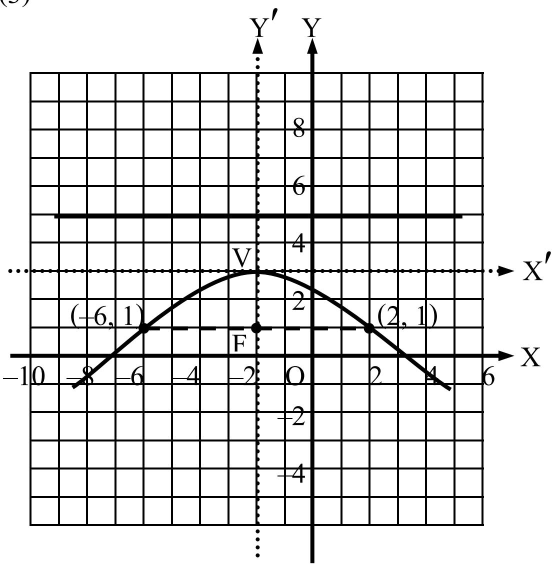
(3) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง x = –2 และจุดยอดอยู่ที่จุด (4, –3)

5. จงหาสมการของพาราโบลา จุดยอด จุดโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวลาตัสเรกตัม จากกราฟที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1)



(3)



3. จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ
จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $(y-2)^2 = 4(x+3)$

....
....
....
....
....
....
....
....

(2) $(x+5)^2 = -8)(x-1)$

....
....
....
....
....
....
....
....

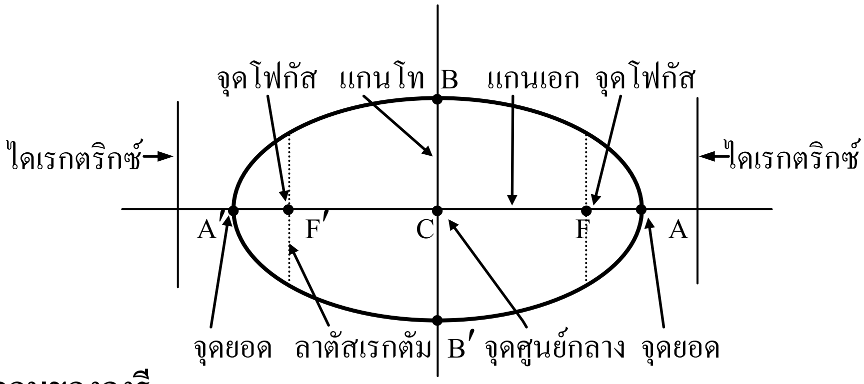
(3) $y^2 + 2y - 12x + 37 = 0$

....
....
....
....
....
....
....
....

3.2.4 วงรี (Ellipse)

บทนิยาม วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวและค่าคงตัวนี้มากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสองนั้น

ลักษณะของวงรี

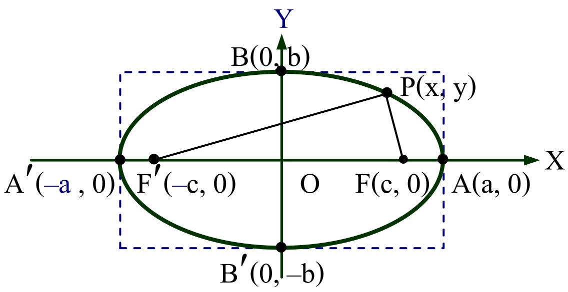


ส่วนประกอบของวงรี

1. จุดคงที่สองจุด คือ จุด F และ F′ เป็น**โฟกัส**ของวงรี
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง คือ จุด C เป็น**จุดศูนย์กลาง**ของวงรี
3. จุดที่เส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสทั้งสองตัดกับวงรี คือจุด A และ A′ เป็น**จุดยอด**ของวงรี
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสองของวงรี คือ AA′ เรียกว่า **แกนเอก**(major axis) ของวงรี
5. ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลาง และมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงรี คือ BB′ เรียกว่า **แกนโท**(minor axis) ของวงรี
6. ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดโฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงรีเรียกว่า **ลาตัสเรกตัม**(ratus rectum) ของวงรี

สมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)

1. โฟกัสอยู่บนแกน X ที่จุด F(c, 0) และ F′(–c, 0) เมื่อ $c > 0$ ดังรูป



หมายเหตุ เส้นประรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ไม่ได้เป็นส่วนใดส่วนหนึ่งของกราฟแต่เขียนเพื่อบอกขอบเขตของวงรีเท่านั้น กราฟของวงรีจะอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้

จากรูป ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนวงรี ระยะห่างระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง = $FF' = 2c$ หน่วย
จากบทนิยาม จะได้ $PF + PF'$ เท่ากับค่าคงตัว ซึ่งมากกว่า 2c

สมมุติให้ $PF + PF' = 2a$ เมื่อ $a > 0$ และ $2a > 2c$

จะได้ $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

กำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

นำ –4 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ถ้าเลื่อนจุด P(x, y) มาอยู่ที่จุด B(0, b) แล้ว Δ POF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ PF = a
จะได้ $b^2 = a^2 - c^2$ แทนค่า $a^2 - c^2$ ด้วย b^2 จะได้ $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

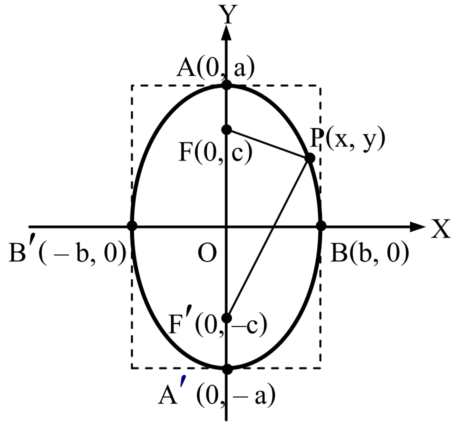
นำ a^2b^2 มาหารทั้งสองข้าง จะได้สมการวงรี $\dfrac{b^2x^2}{a^2b^2} + \dfrac{a^2y^2}{a^2b^2} = \dfrac{a^2b^2}{a^2b^2}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

นั่นคือสมการวงรี $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

1. แกนเอกอยู่บนแกน X
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)
3. จุด A(a, 0) และ A'(–a, 0) เป็นจุดยอดของวงรี และ เรียก AA' ว่าแกนเอก ซึ่ง AA' ยาว 2a หน่วย ($a > 0$)
4. จุด B(0, b) และ B'(0, –b) เป็นจุดปลายแกนโทของวงรี เรียก BB' ว่าแกนโท ซึ่ง BB' ยาว 2b หน่วย ($b > 0$)
5. จุด F(c, 0) และ F'(–c, 0) เป็นโฟกัสของวงรี ซึ่ง FF' ยาว 2c หน่วย ($c > 0$)
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a}$ หน่วย
7. ค่าความเยื้องศูนย์กลาง(eccentricity) หรือ $e = \dfrac{c}{a}$
8. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = \pm\dfrac{a}{e}$ หรือ $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$

2. โฟกัสอยู่บนแกน Y ที่จุด F(0, c) และ $F'(0, -c)$ เมื่อ $c > 0$ ดังรูป



จากรูป

ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนวงรี ระยะห่างระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง = $FF' = 2c$ หน่วย

จากบทนิยาม จะได้ $PF + PF'$ เท่ากับค่าคงตัว ซึ่งมากกว่า 2c

สมมุติให้ $PF + PF' = 2a$ เมื่อ $a > 0$ และ $2a > 2c$ ในทำนองเดียวกัน จะได้สมการวงรี $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

นั่นคือสมการวงรี $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ หรือ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ โดยที่ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

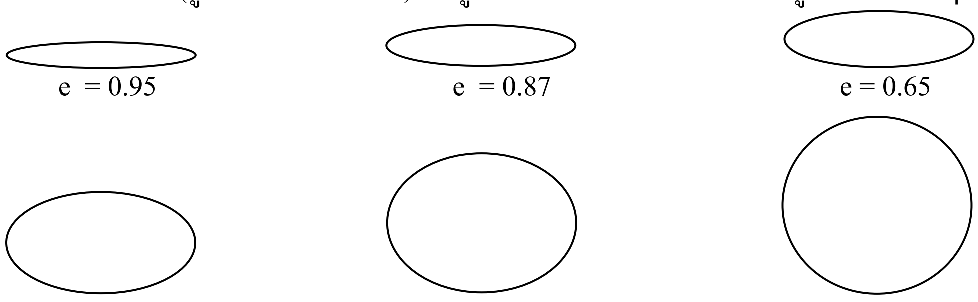
1. แกนเอกอยู่บนแกน Y
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)
3. จุด A(0, a) และ $A'(0, -a)$ เป็นจุดยอดของวงรี และ เรียก AA' ว่าแกนเอก ซึ่ง AA' ยาว 2a หน่วย $(a > 0)$
4. จุด B(b, 0) และ $B'(-b, 0)$ เป็นจุดปลายแกนโทของวงรี เรียก BB' ว่าแกนโท ซึ่ง BB' ยาว 2b หน่วย $(b > 0)$
5. จุด F(0, c) และ $F'(0, -c)$ เป็นโฟกัสของวงรี ซึ่ง FF' ยาว 2c หน่วย $(c > 0)$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
7. ค่าความเยื้องศูนย์กลางของวงรี (eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$
8. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = \pm\frac{a}{e}$ หรือ $y = \pm\frac{a^2}{c}$

บทนิยามของความเยื้องศูนย์กลาง(Eccentricity)

สำหรับวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ หรือ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b > 0$ ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี แทนด้วย e คืออัตราส่วนของ c ต่อ a หรือ $e = \frac{c}{a}$ เมื่อ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีมีค่าระหว่าง 0 และ 1 นั่นคือ $0 < e < 1$

ถ้า e มีค่าใกล้ 1 หรือ c มีค่าเกือบจะเท่ากับ a แล้ววงรีมีความยาวรีมาก(มีรูปร่างเรียวยาว) แต่ถ้า e มีค่าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย (รูปร่างเกือบจะกลม) ดังรูป ซึ่งแสดงวงรีที่มีความเยื้องศูนย์กลางต่างๆกัน



ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด(4, 0) และ (–4, 0) และมีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{8}{13}$

วิธีทำ โฟกัสอยู่ที่จุด(4, 0) และ (4, 0) แสดงจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน X และ $c = 4$ และมีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{8}{13}$ หรือ $e = \frac{8}{13}$

จาก $e = \frac{c}{a}$ จะได้ $\frac{8}{13} = \frac{4}{a}$

$$8a = 52$$

$$a = \frac{13}{2}$$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $4^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - b^2$

$$16 = \frac{169}{4} - b^2$$

$$b^2 = \frac{169}{4} - 16$$

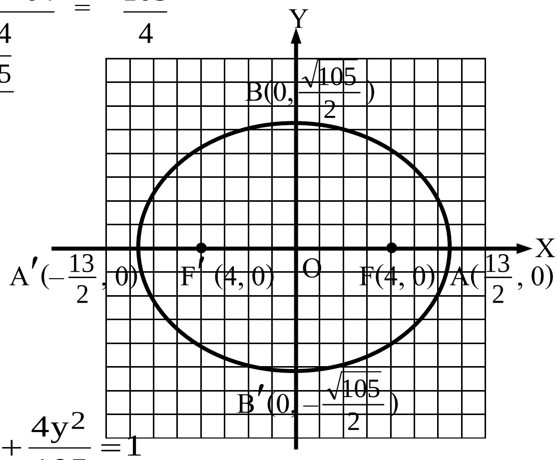
$$= \frac{169-64}{4} = \frac{105}{4}$$

$$b = \frac{\sqrt{105}}{2}$$

สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ $\frac{x^2}{\frac{169}{4}} + \frac{y^2}{\frac{105}{4}} = 1$

$$\frac{4x^2}{169} + \frac{4y^2}{105} = 1$$



ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{4x^2}{169} + \frac{4y^2}{105} = 1$

ตัวอย่างที่ 2 จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาสมการวงรี พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) โฟกัสอยู่ที่จุด (3, 0) และ (–3, 0) และผลบวกของระยะจากจุดใดๆไปยังโฟกัสทั้งสอง (ผลบวกค่าคงตัว) เท่ากับ 8 หน่วย

วิธีทำ จากโฟกัสอยู่ที่จุด (3, 0) และ (–3, 0) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $c = 3$

ผลบวกค่าคงตัวเท่ากับ 8 หน่วย จะได้ $2a = 8 \therefore a = 4$

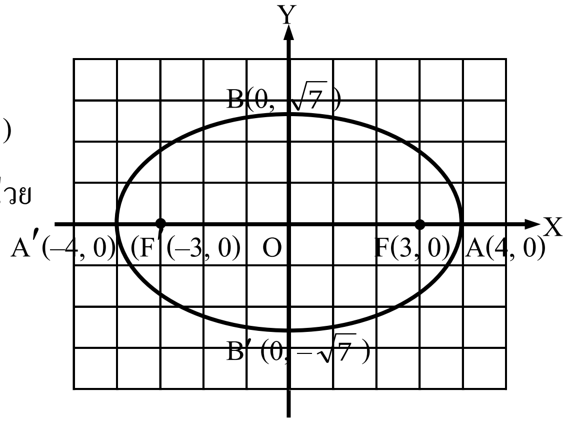
จะได้จุดยอดอยู่ที่จุด (4, 0) และ (–4, 0)

จาก $b^2 = a^2 - c^2$

จะได้ $b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \therefore b = \sqrt{7}$

จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด $(0, \sqrt{7})$ และ $(0, -\sqrt{7})$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(7)}{4} = \frac{7}{2}$ หน่วย



แกนเอกอยู่บนแกน X

สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$

ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ หรือ $7x^2 + 16y^2 = 112$

(2) โฟกัสอยู่ที่จุด (0, 4) และ (0, –4) และผลบวกของระยะจากจุดใดๆไปยังโฟกัสทั้งสอง (ผลบวกค่าคงตัว) เท่ากับ 10 หน่วย

วิธีทำ จาก โฟกัสอยู่ที่จุด (0, 4) และ (0, –4) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $c = 4$

ผลบวกค่าคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย จะได้ $2a = 10 \therefore a = 5$

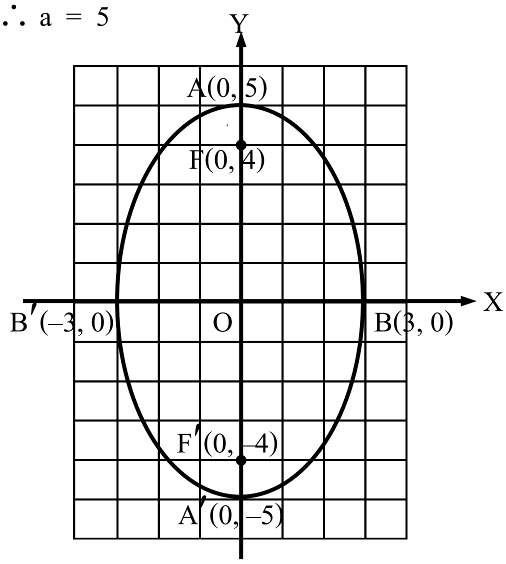
จะได้จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 5) และ (0, –5)

จาก $b^2 = a^2 - c^2$

จะได้ $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \therefore b = 3$

จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด (3, 0) และ (–3, 0)

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{5} = \frac{18}{5}$ หน่วย



แกนเอกอยู่บนแกน Y

สมการอยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการ $\frac{y^2}{5^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$

ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ หรือ $25x^2 + 9y^2 = 225$

(3) จุดยอดอยู่ที่จุด (5, 0) และ (–5, 0) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 0)

วิธีทำ จาก จุดยอดอยู่ที่จุด (5, 0) และ (–5, 0) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $a = 5$

โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 0) จะได้ $c = 2$ และ โฟกัสอีกจุดหนึ่งอยู่ที่ (–2, 0)

จาก $b^2 = a^2 - c^2$

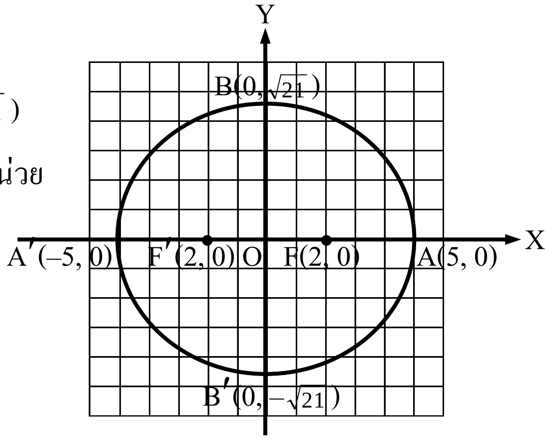
จะได้ $b^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$

$\therefore b = \sqrt{21}$

จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด $(0, \sqrt{21})$ และ $(0, -\sqrt{21})$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(21)}{5} = \frac{42}{5}$ หน่วย

แกนเอกอยู่บนแกน X



สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการ $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{21})^2} = 1$

ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ หรือ $21x^2 + 25y^2 = 525$

(4) โฟกัสอยู่ที่จุด (3, 0) และ (–3, 0) แกนเอกยาว 8 หน่วย

วิธีทำ จากโฟกัสอยู่ที่จุด (3, 0) และ (–3, 0) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $c = 3$

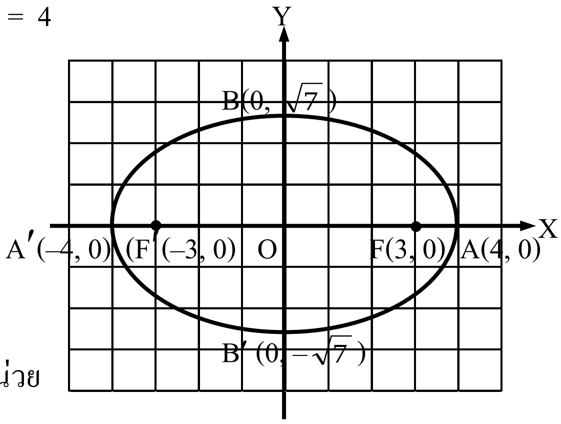
และแกนเอกยาว 8 หน่วย จะได้ $2a = 8 \therefore a = 4$

จะได้จุดยอดอยู่ที่จุด (4, 0) และ (–4, 0)

จาก $b^2 = a^2 - c^2$

จะได้ $b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

$\therefore b = \sqrt{7}$



จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด $(0, \sqrt{7})$ และ $(0, -\sqrt{7})$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(7)}{4} = \frac{7}{2}$ หน่วย

แกนเอกอยู่บนแกน X

สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$

ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ หรือ $7x^2 + 16y^2 = 112$

ตัวอย่างที่ 3 จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาสมการวงรี

(1) จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 6) และ (0, –6) และกราฟผ่านจุด (2, $\sqrt{14}$)

วิธีทำ จาก จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 6) และ (0, –6) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $a = 6$

แกนเอกอยู่บนแกน Y จะได้สมการอยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

เนื่องจาก a = 6 และกราฟผ่านจุด (2, $\sqrt{14}$) จะได้ $\frac{(\sqrt{14})^2}{6^2}+\frac{2^2}{b^2}=1$

$$\frac{14}{36}+\frac{4}{b^2}=1$$

$$\frac{4}{b^2}=1-\frac{14}{36} = \frac{22}{36}$$

$$b^2 = 4(\frac{36}{22})$$

$$\therefore b^2 = \frac{72}{11}$$

ดังนั้น จะได้สมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{y^2}{36}+\frac{11x^2}{72}=1$ หรือ $11x^2+2y^2 = 72$

(6) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X และกราฟผ่านจุด (4, 3) กับจุด (6, 2)

วิธีทำ เนื่องจากจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X จะได้สมการอยู่ในรูป

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

กราฟผ่านจุด (4, 3) จะได้ $\frac{4^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$

$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$ ....(1)

กราฟผ่านจุด (6, 2) จะได้ $\frac{6^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1$

$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ ....(2)

(1) $\times 4$ จะได้ $\frac{64}{a^2}+\frac{36}{b^2}=4$ ....(3)

(2) $\times 9$ จะได้ $\frac{324}{a^2}+\frac{36}{b^2}=9$ ....(4)

(4) - (3) จะได้ $\frac{260}{a^2} = 5$ $\therefore a^2 = 52$

แทนค่า a^2 ด้วย 52 ลงในสมการ (1) จะได้ $\frac{16}{52}+\frac{9}{b^2}=1$

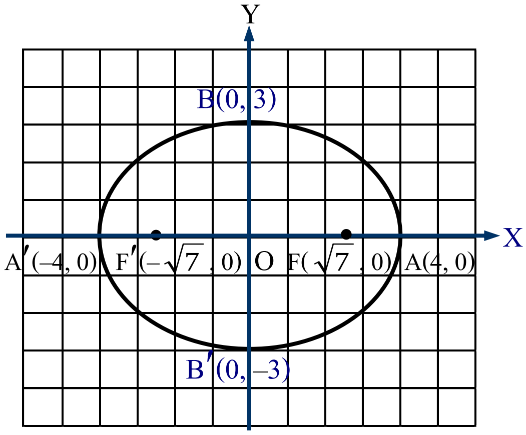
$$\frac{9}{b^2}=1-\frac{16}{52}=\frac{36}{52}=\frac{9}{13}$$

$$\therefore b^2 = 9\times\frac{13}{9} = 13$$

ดังนั้น จะได้สมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$ หรือ $x^2+4y^2 = 52$

ตัวอย่างที่ 4 จากสมการวงรีในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวลาตัสเรกตัม

(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$



วิธีทำ จากสมการ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

จะได้ $a^2 = 16$ ∴ $a = 4$

และ $b^2 = 9$ ∴ $b = 3$

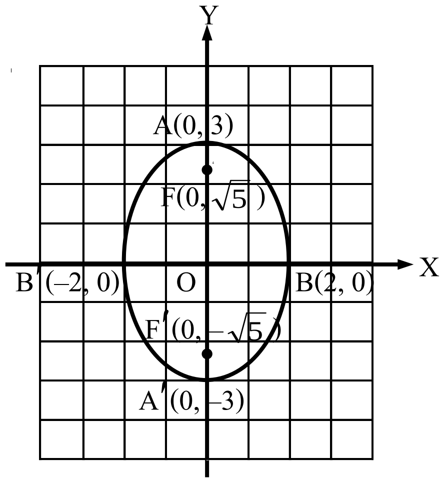
เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$ หรือ $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $c^2 = 16 - 9 = 7$ ∴ $c = \sqrt{7}$

แกนเอกอยู่บนแกน X

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(4, 0) และ A′(–4, 0)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F($\sqrt{7}$, 0) และ F′(–$\sqrt{7}$, 0)
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ B(0, 3) และ B′(0, –3)
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$ หน่วย
Y

(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$



วิธีทำ จากสมการ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

จะได้ $a^2 = 9$ ∴ $a = 3$

และ $b^2 = 4$ ∴ $b = 2$

เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$ หรือ $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $c^2 = 9 - 4 = 5$ ∴ $c = \sqrt{5}$

แกนเอกอยู่บนแกน Y

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(0, 3) และ A′(0, –3)
3. โฟกัสอยู่ที่ F(0, $\sqrt{5}$) และ F′(0, –$\sqrt{5}$)
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ B(2, 0) และ B′(–2, 0)
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$ หน่วย

(3) $3x^2 + y^2 = 3$

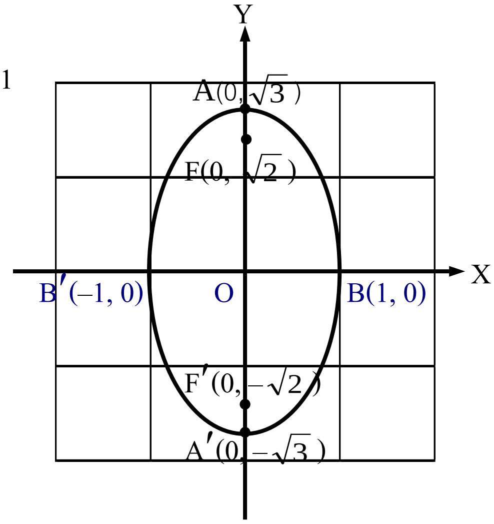
วิธีทำ จากสมการ $3x^2 + y^2 = 3$ หรือ $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

จะได้ $a^2 = 3 \therefore a = \sqrt{3}$ และ $b^2 = 1 \therefore b = 1$

เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$ หรือ $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $c^2 = 3 - 1 = 2$

$\therefore c = \sqrt{2}$



แกนเอกอยู่บนแกน Y

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ $A(0, \sqrt{3})$ และ $A'(0, -\sqrt{3})$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(0, \sqrt{2})$ และ $F'(0, -\sqrt{2})$
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ $B(1, 0)$ และ $B'(-1, 0)$
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(1)^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ หน่วย

(4) $x^2 + 4y^2 = 16$

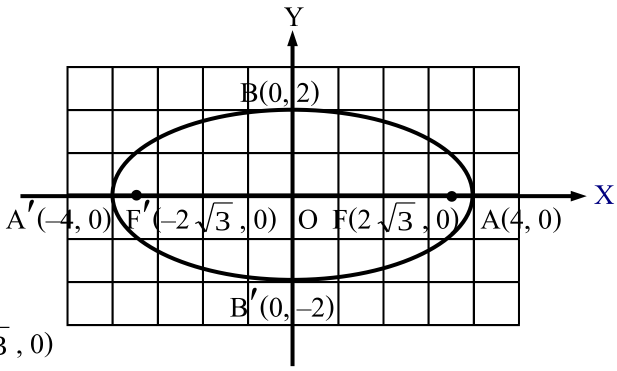
วิธีทำ จากสมการ $x^2 + 4y = 16$ หรือ $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

จะได้ $a^2 = 16 \therefore a = 4$ และ $b^2 = 4 \therefore b = 2$

เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$ หรือ $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $c^2 = 16 - 4 = 12$

$\therefore c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

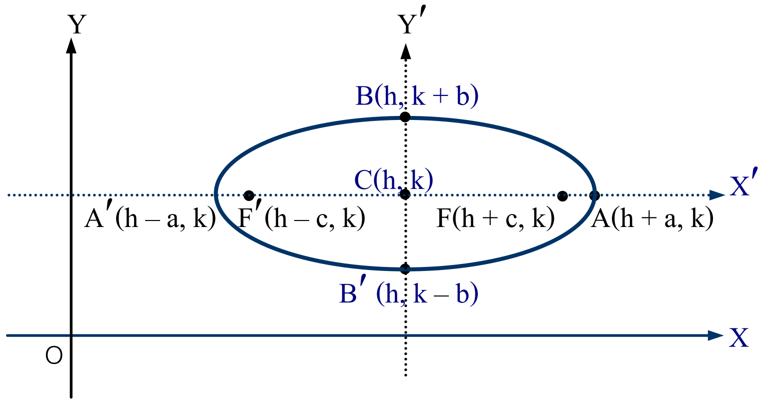


แกนเอกอยู่บนแกน X

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ $A(4, 0)$ และ $A'(-4, 0)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(2\sqrt{3}, 0)$ และ $F'(-2\sqrt{3}, 0)$
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ $B(0, 2)$ และ $B'(0, -2)$
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(2)^2}{4} = 2$ หน่วย

สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k)

1. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X



กำหนด สมการวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X โดยการเลื่อนแกนทางขนานไปอยู่ที่จุด (h, k)

ดังนั้น สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$

เนื่องจาก $x' = x-h$ และ $y' = y-k$

ดังนั้น สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิมคือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{โดยที่ } a>b>0 \text{ และ } b^2=a^2-c^2$$

(1) แกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = k$

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

(3) จุด $F(h+c, k)$ และ $F'(h-c, k)$ เป็นโฟกัสของวงรี ซึ่ง FF' ยาว $2c$ หน่วย $(c>0)$

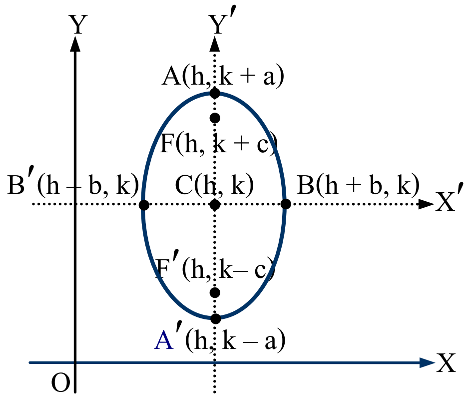
(4) จุด $A(h+a, k)$ และ $A'(h-a, k)$ เป็นจุดยอดของวงรี และ เรียก AA' ว่า**แกนเอก** ซึ่ง AA' ยาว $2a$ หน่วย $(a>0)$

(5) จุด $B(h, k+b)$ และ $B'(h, k-b)$ เป็นจุดปลายแกนโทของวงรี เรียก BB' ว่า**แกนโท** ซึ่ง BB' ยาว $2b$ หน่วย $(b>0)$

(6) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

(7) ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$

2. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน Y



กำหนด สมการวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน Y โดยการเลื่อนแกนทางขนานไปอยู่ที่จุด (h, k) จะได้สมการวงรีเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ $\frac{(x')^2}{b^2}+\frac{(y')^2}{a^2}=1$

เนื่องจาก $x' = x-h$ และ $y' = y-k$

ดังนั้น สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน Y เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิมคือ

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \text{โดยที่ } a>b>0 \text{ และ } b^2=a^2-c^2$$

(1) แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = h$

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h, k)

(3) จุด F(h , k + c) และ F′(h , k – c) เป็นโฟกัสของวงรี ซึ่ง FF′ ยาว 2c หน่วย $(c>0)$

(4) จุด A(h , k + a) และ A′(h, k – a) เป็นจุดยอดของวงรี และ เรียก AA′ ว่า **แกนเอก**
ซึ่ง AA′ ยาว 2a หน่วย $(a>0)$

(5) จุด B(h + b, k) และ B′(h – b, k) เป็นจุดปลายแกนโทของวงรี เรียก BB′ ว่า **แกนโท**
ซึ่ง BB′ ยาว 2b หน่วย $(b>0)$

(6) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

(7) ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$

__หมายเหตุ__ 1. จุดศูนย์กลาง จะอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง หรือระหว่างจุดยอดทั้งสอง หรือระหว่างจุดปลายของแกนโททั้งสอง

2. จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

3. ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดยอด จะเท่ากับ a หน่วย

4. ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับโฟกัส จะเท่ากับ c หน่วย

5. ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดปลายแกนโท จะเท่ากับ b หน่วย

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการวงรี จากสิ่งที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) โฟกัสอยู่ที่จุด(4, 2) และ (–2, 2) และผลบวกคงตัวเท่ากับ 8 หน่วย

วิธีทำ จาก โฟกัสอยู่ที่จุด(4, 2) และ (–2, 2) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองคือ (1, 2)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, 2) จะได้ $h = 1,\ k = 2$

และผลบวกคงตัวเท่ากับ 8 หน่วย จะได้ $2a = 8$ $\therefore\ a = 4$

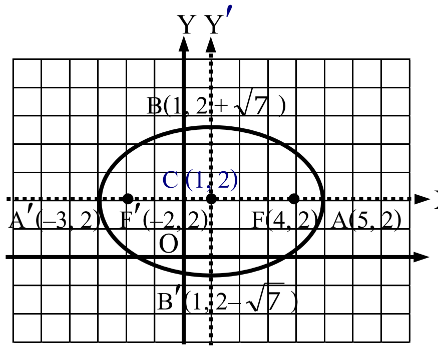
ระยะระหว่างจุด (1, 2) กับจุด (4, 2) เท่ากับ 3 หน่วย $\therefore\ c = 3$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$ $\therefore\ b = \sqrt{7}$

แกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 2$

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการวงรี คือ $\dfrac{(x-1)^2}{4^2} + \dfrac{(y-2)^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$



$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

$$7(x-1)^2 + 16(y-2)^2 = 112$$

$$7(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 112$$

$$7x^2 - 14x + 7 + 16y^2 - 64y + 64 = 112$$

ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$

(2) โฟกัสอยู่ที่จุด(–2, –1) และ (–2, 3) และผลบวกคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย

วิธีทำ จาก โฟกัสอยู่ที่จุด(–2, –1) และ (–2, 3) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองคือ (–2, 1)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–2, 1) จะได้ $h = -2,\ k = 1$

และผลบวกคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย จะได้ $2a = 10$ $\therefore\ a = 5$

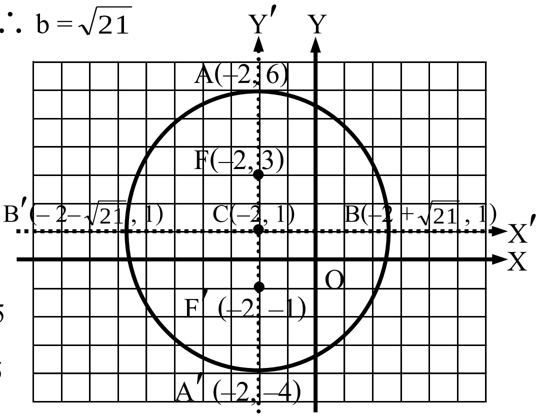
ระยะระหว่างจุด (–2, 1) กับจุด (–2, 3) เท่ากับ 2 หน่วย $\therefore\ c = 2$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$ $\therefore\ b = \sqrt{21}$

แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -2$

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จะได้ สมการวงรี คือ $\dfrac{(x+2)^2}{21} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$



$$25(x+2)^2 + 21(y-1)^2 = 525$$

$$25(x^2 + 4x + 4) + 21(y^2 - 2y + 1) = 525$$

$$25x^2 + 100x + 100 + 21y^2 - 42y + 21 = 525$$

$$25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$$

ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$

(3) จุดยอดอยู่ที่ (–1, 3) และ (5, 3) แกนโทยาว 4 หน่วย

วิธีทำ จาก จุดอยู่ที่ (–1, 3) และ (5, 3) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดยอดทั้งสองคือ (2, 3)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, 3) $\therefore$ $h = 2,\ k = 3$

เนื่องจากแกนโทยาว 4 หน่วย จะได้ $2b = 4$ $\therefore$ $b = 2$

และระยะระหว่างจุด (2, 3) กับจุด (5, 3) เท่ากับ 3 หน่วย $\therefore$ $a = 3$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$ $\therefore$ $c = \sqrt{5}$

ซึ่งแกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 3$

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการวงรี คือ $\dfrac{(x-2)^2}{3^2} + \dfrac{(y-3)^2}{2^2} = 1$

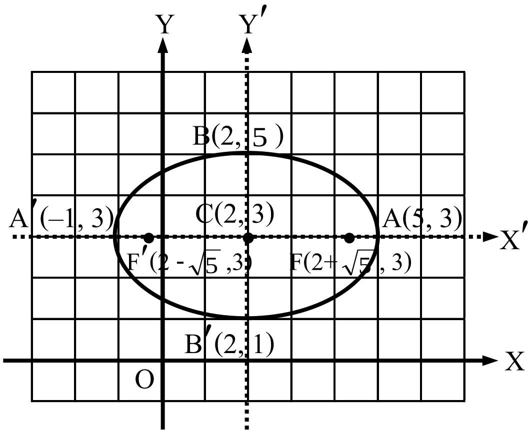
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$$4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 36$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = 36$$

$$4x^2 - 16x + 16 + 9y^2 - 54y + 81 = 36$$

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$$



ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$

(4) จุดปลายแกนเอกอยู่ที่ (3, 4) และ (3, –4) กราฟผ่านจุด (0, 0)

วิธีทำ จาก จุดปลายแกนเอกอยู่ที่ (3, 4) และ (3, –4) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองคือ (3, 0)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, 0) จะได้ $h = 3$, $k = 0$

ระยะระหว่างจุด (3, 0) กับจุด (3, 4) เท่ากับ 4 หน่วย $\therefore a = 4$

แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = 3$

กราฟผ่านจุด (0, 0) จะได้ $\dfrac{(0-3)^2}{b^2} + \dfrac{(0)^2}{4^2} = 1$

จะได้ $\dfrac{9}{b^2} = 1$ จะได้ $b^2 = 9$ $\therefore$ $b = 3$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 16 - 9 = 7$ $\therefore$ $c = \sqrt{7}$

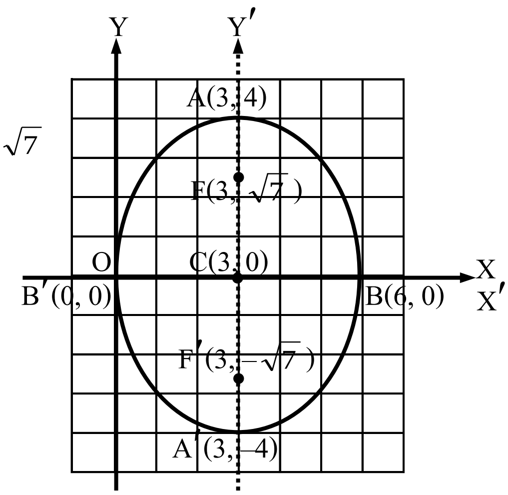
จะได้ สมการ $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

$$16(x-3)^2 + 9y^2 = 144$$

$$16(x^2 - 6x + 9) + 9y^2 = 144$$

$$16x^2 - 96x + 144 + 9y^2 = 144$$

$$16x^2 + 9y^2 - 96x = 0$$



ดังนั้น สมการวงรีที่ต้องการคือ $16x^2 + 9y^2 - 96x = 0$

ตัวอย่างที่ 4 จากสมการวงรีต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง โฟกัส จุดยอด จุดปลายแกนโท ลาตัสเรกตัม และความเยื้องศูนย์กลาง

(1) $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$ จัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$(7x^2 - 14x) + (16y^2 - 64y) = 41$$

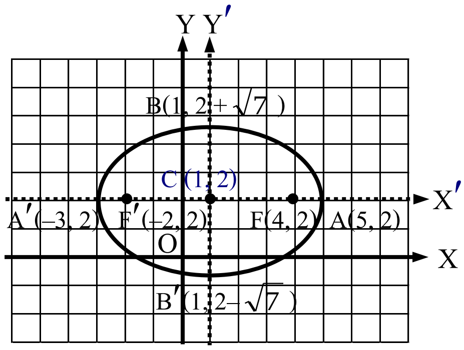
$$7(x^2 - 2x) + 16(y^2 - 4y) = 41$$

$$7(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 41 + 7 + 64$$

$$7(x-1)^2 + 16(y-2)^2 = 112$$

นำ 112 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{7} = 1$



จะได้ $h = 1,\ k = 2$

$a^2 = 16 \quad \therefore a = \sqrt{16} = 4$

$b^2 = 7 \quad \therefore b = \sqrt{7}$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $c^2 = 16 - 7 = 9$

$\therefore c = \sqrt{9} = 3$

(1) แกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 2$ (อยู่บนเส้นตรง $y = k$)

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k) = C(1, 2)$

(3) จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h + c, k) = F(1 + 3, 2) = F(4, 2)$

และ $F'(h - c, k) = F(1 - 3, 2) = F(-2, 2)$

(4) จุดยอดอยู่ที่ $A(h + a, k) = A(1 + 4, 2) = A(5, 2)$

และ $A'(h - a, k) = A'(1 - 4, 2) = A'(-3, 2)$

(5) จุดปลายแกนโทอยู่ที่ $B(h, k + b) = B(1, 2 + \sqrt{7})$

และ $B'(h, k - b) = B'(1, 2 - \sqrt{7})$

(6) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(7)}{4} = \dfrac{7}{2}$ หน่วย

(7) ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{4}$

(2) $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$ จัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$(25x^2 + 100x) + (21y^2 - 42y) = 404$$

$$25(x^2 + 4x) + 21(y^2 - 2y) = 404$$

$$25(x^2 + 4x + 4) + 21(y^2 - 2y + 1) = 404 + 100 + 21$$

$$25(x + 2)^2 + 21(y - 1)^2 = 525$$

นำ 525 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{(x+2)^2}{21} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

จะได้ $h = -2,\ k = 1$

$a^2 = 25 \quad \therefore a = \sqrt{25} = 5$

$b^2 = 21 \quad \therefore b = \sqrt{21}$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $c^2 = 25 - 21 = 4 \quad \therefore c = \sqrt{4} = 2$

(1) แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -2$ (อยู่บนเส้นตรง $x = h$)

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k) = C(-2, 1)$

(3) จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k + c) = F(-2, 1 + 2) = F(-2, 3)$

และ $F'(h, k - c) = F'(-2, 1 - 2) = F'(-2, -1)$

(4) จุดยอดอยู่ที่ $A(h, k + a) = A(-2, 1 + 5) = A(-2, 6)$

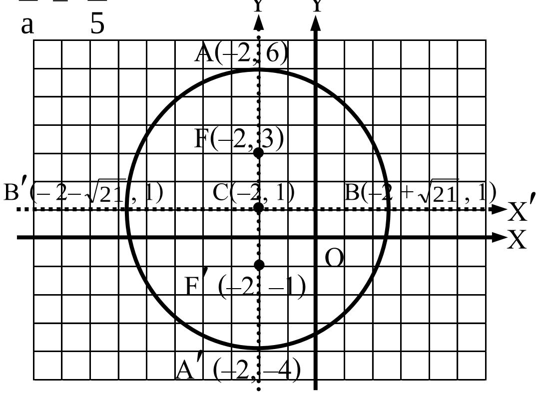
และ $A'(h, k - a) = A'(-2, 1 - 5) = A'(-2, -4)$

(5) จุดปลายแกนโทอยู่ที่ $B(h + b, k) = B(-2 + \sqrt{21}, 1)$

และ $B'(h - b, k) = B'(-2 - \sqrt{21}, 1)$

(6) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(21)}{5} = \frac{42}{5}$ หน่วย

(7) ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{5}$



ใบกิจกรรมที่ 3.2.4

1. จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาสมการวงรี พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) ระยะจากจุดใดๆบนวงรีไปยังจุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ เท่ากับ 8 หน่วย

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -4)$ และ $(0, 4)$ และผลบวกคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย

....

....

....

....

....

....

....

....

(3) จุดยอดอยู่ที่ $(-10, 0)$ และ $(10, 0)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-8, 0)$ และ $(8, 0)$

....

....

....

....

....

....

....

....

(4) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน Y ยาว 8 หน่วย และความยาวลาตัสเรกตัมเท่ากับ $\frac{9}{2}$

2. จากสมการวงรีในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวลาตัสเรกตัม ความเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟ

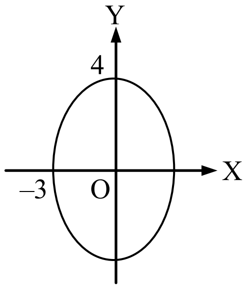
(1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

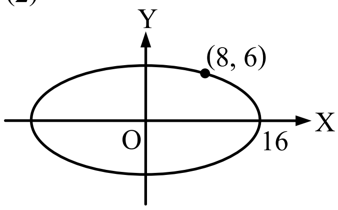
(3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

3. จากกราฟต่อไปนี้จงหาสมการวงรี

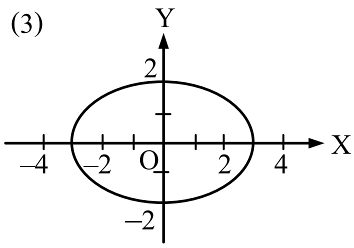
(1)



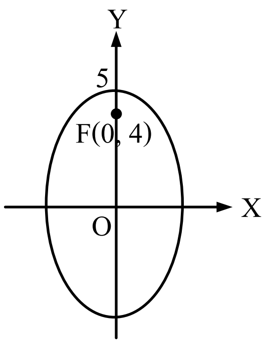
(2)



(3)



(4)



4. จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาสมการวงรี พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) ผลบวกของระยะจากจุดใดๆบนวงรีไดยังจุด $(-2, -1)$ และ $(-2, -5)$ เท่ากับ 8 หน่วย

(2) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(6, 3)$ โฟกัสอยู่ที่ $(4, 3)$ และ $(-4, 3)$

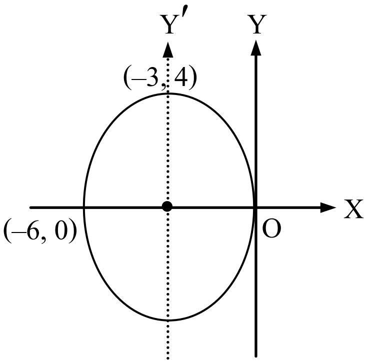
5. จากสมการวงรีในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวลาตัสเรกตัม ความเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$

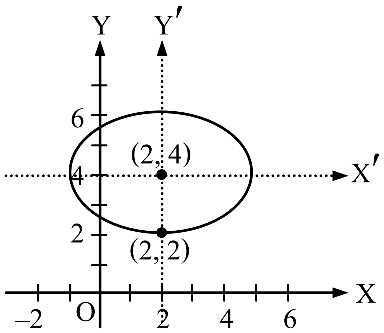
(2) $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

6. จากกราฟต่อไปนี้จงหาสมการวงรี

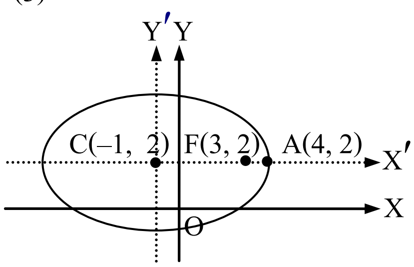
(1)



(2)



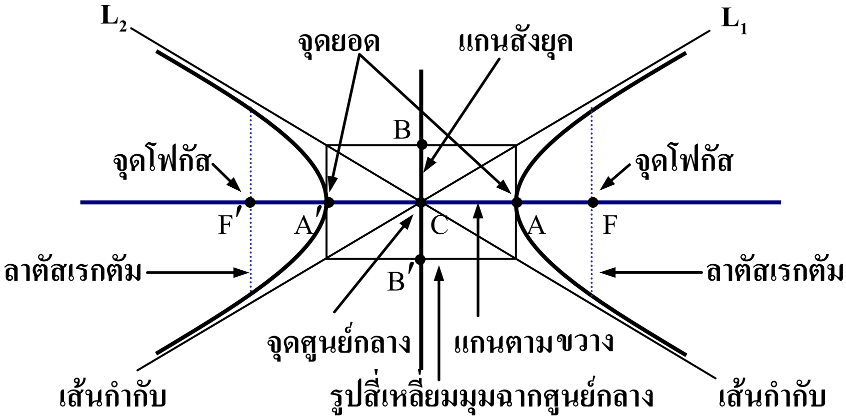
(3)



3.2.5 ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

บทนิยาม ไฮเพอร์โบลา คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะห่างจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวซึ่งมากกว่าศูนย์ แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง

ลักษณะของไฮเพอร์โบลา

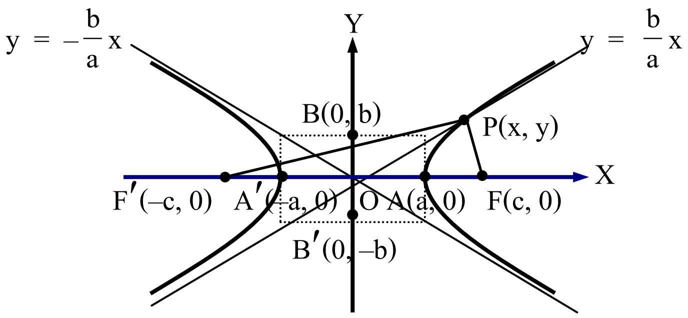


ส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา

1. จุดคงที่สองจุด คือ F และ F′ เป็น**โฟกัส**ของไฮเพอร์โบลา
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง คือ จุด C เป็น**จุดศูนย์กลาง**ของไฮเพอร์โบลา
3. จุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดกับเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสอง คือ จุด A และ A′ เป็น**จุดยอด**ของไฮเพอร์โบล
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา คือ AA′ เรียกว่า **แกนตามขวาง** (transverse axis) ของไฮเพอร์โบลา
5. ส่วนของเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนตามขวาง คือ BB′ เรียกว่า **แกนสังยุค** (conjugate axis) ของไฮเพอร์โบลา
6. เส้นตรง L_1 และ L_2 เป็น**เส้นกำกับ** (asymptotes) ของไฮเพอร์โบลา

สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)

1. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน X



กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และโฟกัสที่จุด F(c, 0) และ F′(–c, 0) เมื่อ $c > 0$ ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลา และผลต่างระยะจากจุด P ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2a ซึ่ง $a > 0$

จากบทนิยาม $|PF' - PF| = 2a$

จะได้ $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

จะได้ $(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

นำ 4 มาหารทั้งสองข้าง

จะได้ $cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

จะได้ $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2x^2 - a^2x^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2-a^2)a^2$$

นำ $(c^2-a^2)a^2$ มาหารทั้งสองข้าง

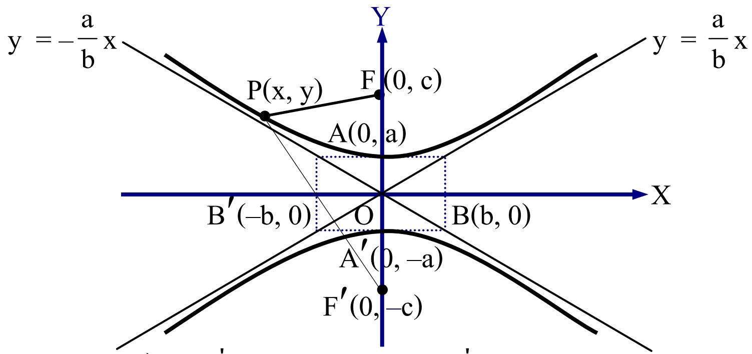
จะได้ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$

เนื่องจาก $0 < a < c$ ดังนั้น $c^2 - a^2 > 0$ ให้ $c^2 - a^2 = b^2$ เมื่อ $b > 0$

นั่นคือ สมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. แกนตามขวางอยู่บนแกน X
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(c, 0) และ $F'(-c, 0)$
4. จุดยอดอยู่ที่ A(a, 0) และ $A'(-a, 0)$ ซึ่งความยาวแกนตามขวาง คือ $AA' = 2a$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(0, b) และ $B'(0, -b)$ ซึ่งความยาวแกนสังยุค คือ $BB' = 2b$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y = \pm\frac{b}{a}x$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
8. ค่าความเยื้องศูนย์กลาง(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$

2. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)แกนตามขวางอยู่บนแกน Y



กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และโฟกัสที่จุด F(0, c) และ $F'(0, -c)$ เมื่อ $c > 0$ ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลา และผลต่างระยะจากจุด P ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2a ซึ่ง $a > 0$

จากบทนิยาม จะได้ $|PF' - PF| = 2a$ ในทำนองเดียวกัน

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. แกนตามขวางอยู่บนแกน Y
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(0, c) และ $F'(0, -c)$
4. จุดยอดอยู่ที่ A(0, a) และ $A'(0, -a)$ ซึ่งความยาวแกนตามขวาง คือ $AA' = 2a$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(b, 0) และ $B'(-b, 0)$ ซึ่งความยาวแกนสังยุค คือ $BB' = 2b$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y = \pm\frac{a}{b}x$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
8. ค่าความเยื้องศูนย์กลาง(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$

หมายเหตุ 1. จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ หรือ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

ถ้า a = b เราเรียกสมการนี้ว่า**ไฮเพอร์โบลามุมฉาก**(rectangular hyperbola) เช่น

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$ หรือ $x^2-y^2=16$, $\frac{y^2}{10}-\frac{x^2}{10}=1$ หรือ $y^2-x^2=10$ เป็นต้น

2. จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ถ้า $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ แล้ว จะได้ $y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2$ ดังนั้น $y=\pm\frac{b}{a}x$

นั่นคือ $y=\frac{b}{a}x$ หรือ $y=-\frac{b}{a}x$ ซึ่งเป็น**สมการเส้นกำกับ**ของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

3. ในทำนองเดียวกันจากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

ถ้า $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$ แล้ว จะได้ $y^2=\frac{a^2}{b^2}x^2$ ดังนั้น $y=\pm\frac{a}{b}x$

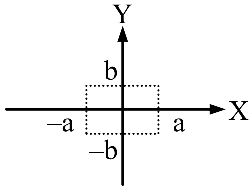
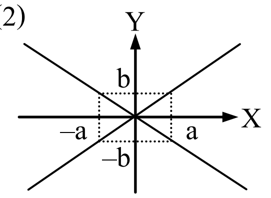
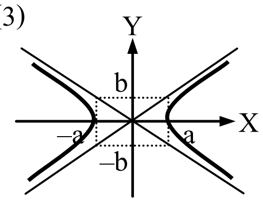
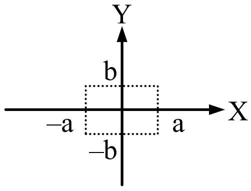
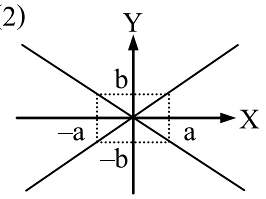
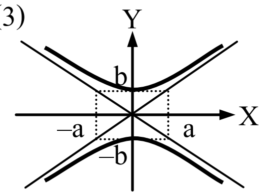
นั่นคือ $y=\frac{a}{b}x$ หรือ $y=-\frac{a}{b}x$ ซึ่งเป็น**สมการเส้นกำกับ**ของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

กราฟของไฮเพอร์โบลาเป็นเส้นโค้ง 2 เส้น แต่ละเส้นเรียกว่า กิ่ง(branches) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านลากผ่านจุด $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ หรือ $(0, \pm a)$, $(\pm b, 0)$ เรียกว่า**รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากศูนย์กลาง**(central rectangle)

วิธีการเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

1. วาดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากศูนย์กลาง ที่มีจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลางมีแต่ละด้านขนานกับแกนพิกัด และตัดแกนพิกัดที่ $\pm a$ และ $\pm b$
2. ลากเส้นกำกับซึ่งเป็นเส้นตรงที่เกิดจากต่อเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากศูนย์กลาง
3. ลงจุดยอด คือจุดที่ระยะตัดแกน X ทั้งสอง $(x=\pm a)$ ของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

   หรือ จุดที่ระยะตัดแกน Y ทั้งสอง $(y=\pm a)$ ของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
4. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา เริ่มต้นจากจุดยอดทีละจุด เขียนกราฟของแต่ละกิ่งของไฮเพอร์โบลา โดยลากเส้นโค้งลู่เข้าหาเส้นกำกับแต่ไม่ตัดเส้นกำกับ ดังนี้

การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	(1) 	(2) 	(3) 
การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	(1) 	(2) 	(3) 

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) ผลต่างของระยะจากจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (5, 0) และ (– 5, 0) เท่ากับ 8 หน่วย

วิธีทำ จุด (5, 0) และ (– 5, 0) เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และ $c = 5$

แกนตามขวางอยู่บนแกน X และจาก ผลต่างเท่ากับ 8 หน่วย จะได้ $2a = 8 \therefore a = 4$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \therefore b = 3$

และสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ดังนั้น จะได้สมการที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ หรือ $9x^2 - 16y^2 = 144$

จุดยอดคือ A(4, 0) และ A′(– 4, 0)

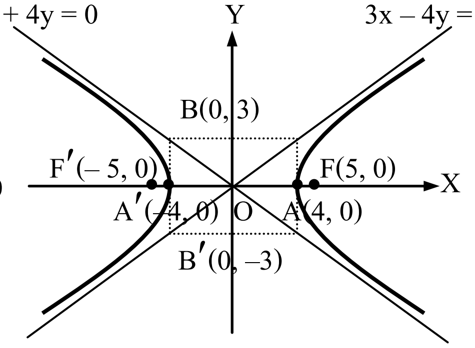
จุดปลายแกนสังยุคคือ B(0, 3) และ B′(0, – 3)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{3}{4}x$

$3x + 4y = 0$ หรือ $3x - 4y = 0$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(3)^2}{4} = \frac{9}{2}$ หน่วย

ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{5}{4}$



(2) ผลต่างของระยะจากจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (0, 5) และ (0, –5) เท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ จุด F(0, 5) และ F′(0, –5) เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และ $c = 5$

แกนตามขวางอยู่บนแกน Y และจาก ผลต่างเท่ากับ 6 หน่วย จะได้ $2a = 6 \therefore a = 3$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \therefore b = 4$

และสมการอยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการที่ต้องการ คือ $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ หรือ $16y^2 - 9x^2 = 144$

จุดยอดคือ A(0, 3) และ A′(0, –3)

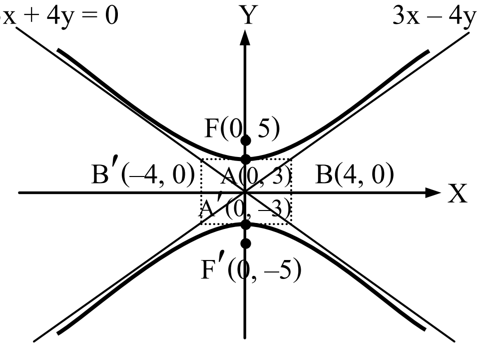
จุดปลายแกนสังยุคคือ B(4, 0) และ B′(–4, 0)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{3}{4}x$

$3x + 4y = 0$ หรือ $3x - 4y = 0$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(4)^2}{3} = \frac{32}{3}$ หน่วย

ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{5}{3}$



(3) โฟกัสอยู่ที่จุด (13, 0) และ (–13, 0) และแกนสังยุคยาว 24 หน่วย

วิธีทำ เนื่องจากโฟกัสอยู่ที่จุด (13, 0) และ (–13, 0) จะได้ c = 13 และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน X

และจาก แกนสังยุคยาว 24 หน่วย จะได้ 2b = 24 $\therefore$ b = 12

เนื่องจาก $b^2 = c^2 - a^2$ หรือ $a^2 = c^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$ $\therefore$ a = 5

และสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ หรือ $144x^2 - 25y^2 = 3600$

จุดยอดคือ A(5, 0) และ A′(–5, 0)

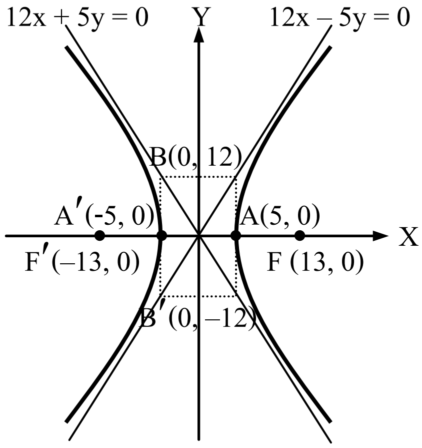
จุดปลายแกนสังยุคคือ B(0, 12) และ B′(0, –12)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{12}{5}x$

$12x + 5y = 0$ หรือ $12x - 5y = 0$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(12)^2}{5} = \frac{288}{5}$ หน่วย

ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{13}{5}$



(4) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (–2, 0) และ กราฟผ่านจุด $(2\sqrt{2}, 3)$

วิธีทำ จากจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (–2, 0) แสดงว่าแกนตามขวางอยู่บนแกน X

และ a = 2 สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ และกราฟผ่านจุด $(2\sqrt{2}, 3)$

จะได้ $\frac{(2\sqrt{2})^2}{2^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1$ ซึ่ง $b^2 = 9$ $\therefore$ b = 3

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 2^2 + 3^2 = 13$ $\therefore c = \sqrt{13}$

ดังนั้น จะได้สมการที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ หรือ $9x^2 - 4y^2 = 36$

จุดยอดคือ A(2, 0) และ A′(–2, 0)

จุดโฟกัสคือ $F(\sqrt{13}, 0)$ และ $F'(-\sqrt{13}, 0)$

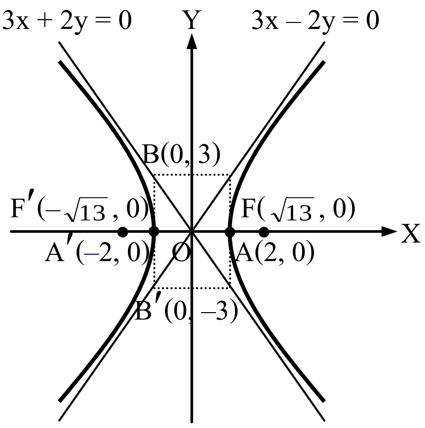
จุดปลายแกนสังยุคคือ B(0, 3) และ B′(0, -3)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{3}{2}x$

หรือ $3x + 2y = 0$ กับ $3x - 2y = 0$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(9)}{2} = 9$ หน่วย

eccentricity หรือ $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$



ตัวอย่างที่ 2 จากสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับความยาวลาตัสเรกตัม ความเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

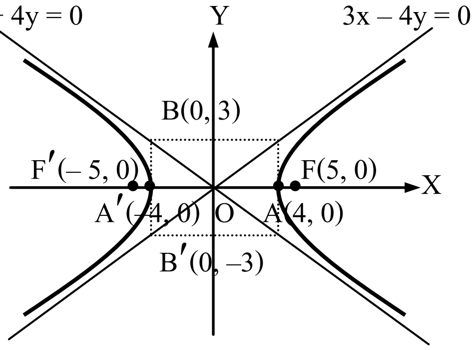
วิธีทำ จากสมการ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่บนแกน X

จะได้ $a^2 = 16 \therefore a = 4$ และ $b^2 = 9 \therefore b = 3$

จาก $c^2 = a^2+b^2$ จะได้ $c^2 = 16+9 = 25 \therefore c = \sqrt{25} = 5$

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(4, 0) และ $A'(-4, 0)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(5, 0) และ $F'(-5, 0)$
4. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(0, 3) และ $B'(0, -3)$
5. สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{3}{4}x$

   $3x+4y=0$ หรือ $3x-4y=0$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(3)^2}{4} = \frac{9}{2}$ หน่วย
7. ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{5}{4}$



(2) $16y^2 - 9x^2 = 144$

วิธีทำ จาก $16y^2 - 9x^2 = 144$ นำ 144 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

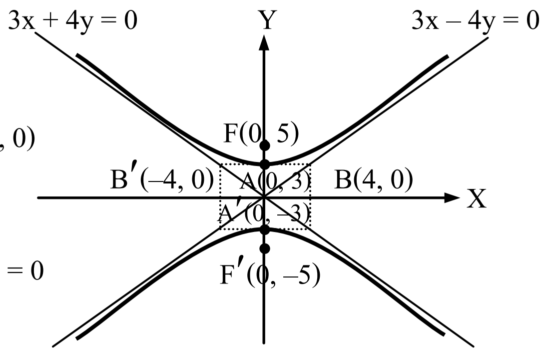
เป็นสมการไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

จะได้ $a^2 = 9 \therefore a = 3$ และ $b^2 = 16 \therefore b = 4$

จาก $c^2 = a^2+b^2$ จะได้ $c^2 = 9+16 = 25 \therefore c = \sqrt{25} = 5$

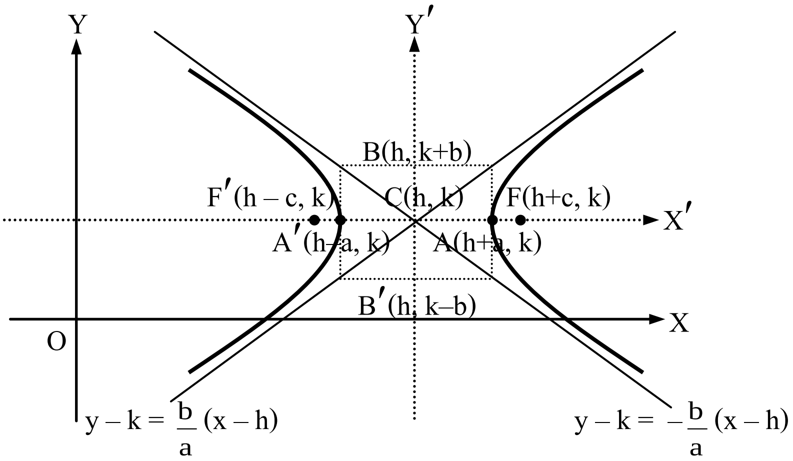
1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(0, 3) และ $A'(0, -3)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(0, 5) และ $F'(0, -5)$
4. จุดปลายแกนสังยุคคือ B(4, 0) และ $B'(-4, 0)$
5. สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{3}{4}x$

   $3x+4y=0$ หรือ $3x-4y=0$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(4)^2}{3} = \frac{32}{3}$
7. ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{5}{3}$



2. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k)

1. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k)แกนตามขวางขนานกับแกน X



กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = k$

จากความรู้เรื่องการเลื่อนแกนทางขนาน จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ

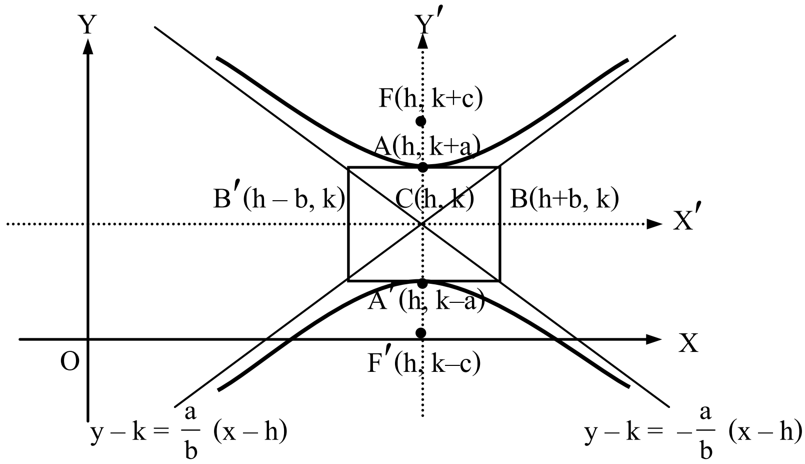
$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

แต่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนเดิม คือ

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } b^2 = c^2 - a^2 \text{ และ } 0 < a < c}$$

1. แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = k$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด C(h, k)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด F(h + c, k) และ F′(h – c, k)
4. จุดยอดอยู่ที่จุด A(h + a, k) และ A′(h – a, k)
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด B(h, k + b) และ B′(h, k – b)
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
8. ความเยื้องศูนย์กลาง(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$

2. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน Y



กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง x = h

จากความรู้เรื่องการเลื่อนแกนทางขนาน จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ

$$\frac{(y')^2}{a^2} - \frac{(x')^2}{b^2} = 1$$

แต่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนเดิม คือ

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } b^2 = c^2 - a^2 \text{ และ } 0 < a < c}$$

1. แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = h$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด C(h, k)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด F(h, k + c) และ F′(h , k – c)
4. จุดยอดอยู่ที่จุด A(h, k + a) และ A′(h, k – a)
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด B(h + b, k) และ B′(h – b, k)
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
8. ความเยื้องศูนย์กลาง(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$

หมายเหตุ (1) สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ หรือ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

เรียกว่า สมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

(2) เส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะมีสมการในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$ หรือ $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะมีสมการในรูป $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=0$ หรือ $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

(3) ถ้า $a = b$ แล้ว จะเรียกไฮเพอร์โบลานั้นว่า **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก**

(4) จากสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ถ้ารากระจายและทำให้เป็นผลสำเร็จ

จะได้**สมการอยู่ในรูปทั่วไป**คือ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ เมื่อ A และ B ไม่เท่ากับศูนย์

และมีจำนวนหนึ่งเป็นบวก อีกจำนวนหนึ่งเป็นลบ

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นอาจเขียนสมการดังกล่าวได้เป็นดังนี้

$x^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0$

(5) กราฟของสมการ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ เมื่อ $A>0, B<0$ หรือ $A<0, B>0$

อาจจะไม่เป็นกราฟไฮเพอร์โบลาก็ได้ ถ้าต้องการทราบต้องจัดสมการใหม่โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) ผลต่างของระยะจากจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด(4, 2) และ (–2, 2) เท่ากับ 4 หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้โฟกัสอยู่ที่จุด(4, 2) และ (–2, 2) และจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองคือจุด (1, 2)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, 2) จะได้ $h = 1,\ k = 2$

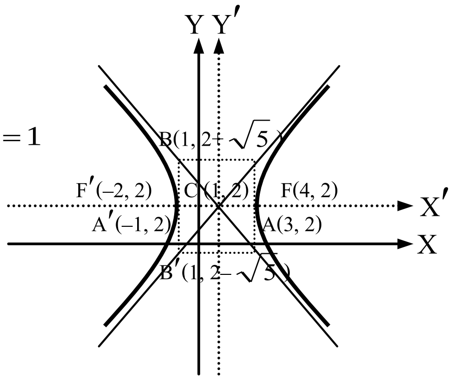
และผลต่างคงตัวเท่ากับ 4 หน่วย จะได้ $2a = 4 \ \therefore a = 2$

ระยะระหว่างจุด (1, 2) กับจุด (4, 2) เท่ากับ 3 หน่วย $\therefore c = 3$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \ \therefore b = \sqrt{5}$

แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 2$

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



จะได้สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\dfrac{(x-1)^2}{2^2} - \dfrac{(y-2)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$

$\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{5} = 1$

$5(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 = 20$

$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 20$

$5x^2 - 10x + 5 - 4y^2 + 16y - 16 = 20$ หรือ $5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0$

ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลาที่ต้องการคือ $5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0$

(2) โฟกัสอยู่ที่จุด(–2, –6) และ (–2, 4) และผลต่างคงตัวเท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ จาก โฟกัสอยู่ที่จุด(–2, –6) และ (–2, 4) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองคือ (–2, –1)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–2, –1) จะได้ $h = -2,\ k = -1$

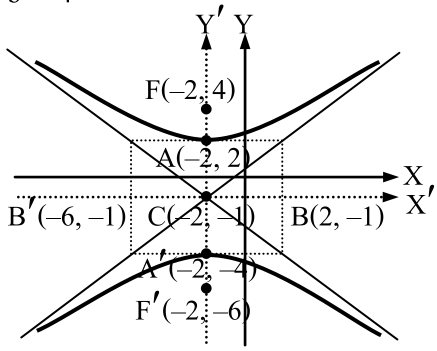
และผลต่างคงตัวเท่ากับ 6 หน่วย จะได้ $2a = 6 \ \therefore a = 3$

ระยะระหว่างจุด (–2, –1) กับจุด (–2, 4) เท่ากับ 5 หน่วย $\therefore c = 5$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \ \therefore b = 4$

แกนตาขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -2$

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$



จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\dfrac{(y+1)^2}{3^2} - \dfrac{(x+2)^2}{4^2} = 1$

$16(y + 1)^2 - 9(x + 2)^2 = 144$

$16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 144$

$16y^2 + 32y + 16 - 9x^2 - 36x - 36 = 144$ หรือ $16y^2 - 9x^2 + 32y - 36x - 164 = 0$

ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลาที่ต้องการคือ $16y^2 - 9x^2 + 32y - 36x - 164 = 0$

(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–4, 2) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (–4, 6) และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนแกน X

วิธีทำ จาก จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–4, 2) จะได้ $h = -4$, $k = 2$

และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (–4, 6)

ระยะระหว่างจุด (–4, 2) กับจุด (–4, 6) เท่ากับ 4 หน่วย $\therefore c = 4$

และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนแกน X คือจุด –4, 0)

ระยะระหว่างจุด (–4, 2) กับจุด (–4, 0) เท่ากับ 2 หน่วย $\therefore a = 2$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$

จะได้ $b^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \quad \therefore b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -4$

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จะได้ สมการ คือ $\dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x+4)^2}{12} = 1$

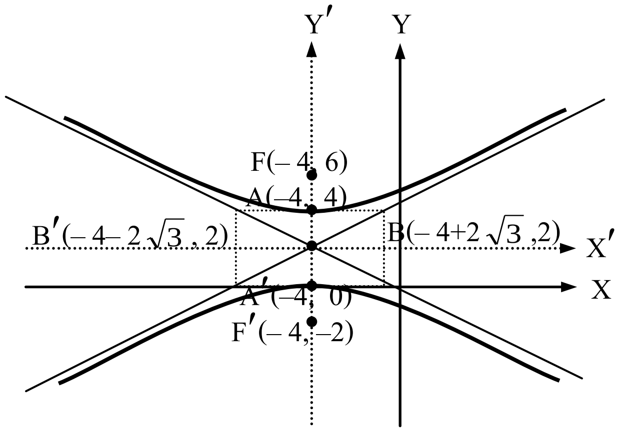
$$3(y-2)^2 - (x+4)^2 = 12$$

$$3(y^2 - 4y + 4) - (x^2 + 8x + 16) = 12$$

$$3y^2 - 12y + 12 - x^2 - 8x - 16 = 12$$

$$3y^2 - x^2 - 12y - 8x - 16 = 0$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลาที่ต้องการคือ $3y^2 - x^2 - 12y - 8x - 16 = 0$



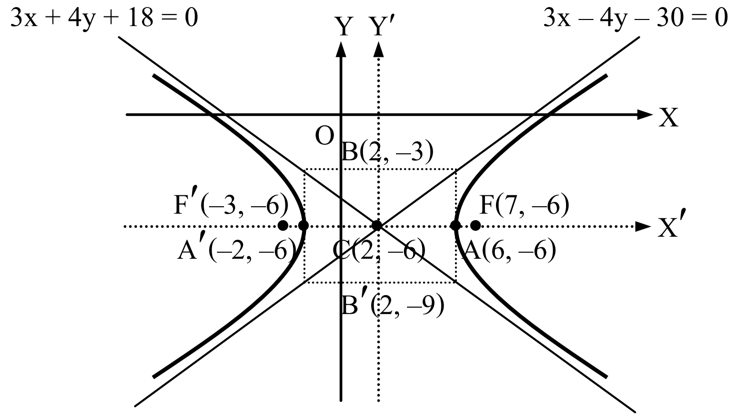
ตัวอย่างที่ 4 จากสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม ความเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+6)^2}{9}=1$

วิธีทำ จาก $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+6)^2}{9}=1$ จะได้ $h = 2,\ k = -6$

จาก $a^2 = 16$ จะได้ $a = 4$ และ $b^2 = 9$ จะได้ $b = 3$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 16 + 9 = 25 \therefore c = 5$



1. แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = -6$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k) = C(2, -6)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h + c, k) = F(2 + 5, -6) = F(7, -6)$

   และ $F'(h - c, k) = F'(2 - 5, -6) = F'(-3, -6)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $A(h + a, k) = A(2 + 4, -6) = A(6, -6)$

   และ $A'(h - a, k) = A'(2 - 4, -6) = A'(-2, -6)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด $B(h, k + b) = B(2, -6 + 3) = B(2, -3)$

   และ $B'(h, k - b) = B'(2, -6 - 3) = B'(2, -9)$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$

   $y + 6 = \pm\frac{3}{4}(x - 2)$

   จะได้ $3x + 4y + 18 = 0$ กับ $3x - 4y - 30 = 0$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$ หน่วย
8. ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{5}{4}$

(2) $16y^2 - 9x^2 + 32y - 36x - 164 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $16y^2 - 9x^2 + 32y - 36x - 164 = 0$

$$(16y^2 + 32y) - (9x^2 + 36x) = 164$$

$$16(y^2 + 2y) - 9(x^2 + 4x) = 164$$

$$16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 164 + 16 - 36$$

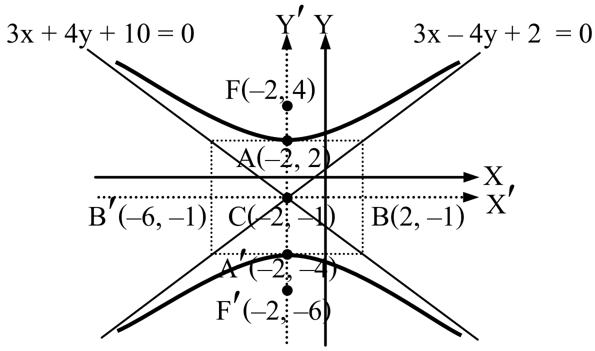
$$16(y+1)^2 - 9(x+2)^2 = 144$$

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$$

จะได้ $h = -2,\ k = -1$

จาก $a^2 = 9$ จะได้ $a = 3$ และ $b^2 = 16$ จะได้ $b = 4$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 9 + 16 = 25$ $\therefore c = 5$



1. แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -2$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k) = C(-2, -1)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h, k + c) = F(-2, -1 + 5) = F(-2, 4)$

   และ $F'(h, k - c) = F'(-2, -1 - 5) = F'(-2, -6)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $A(h, k + a) = A(-2, -1 + 3) = A(-2, 2)$

   และ $A'(h, k - a) = A'(-2, -1-3) = A'(-2, -4)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด $B(h + b, k) = B(-2 + 4, -1) = B(2, -1)$

   และ $B'(h - b, k) = B'(-2 - 4, -1) = B'(-6, -1)$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

   $$y + 1 = \pm \frac{3}{4}(x + 2)$$

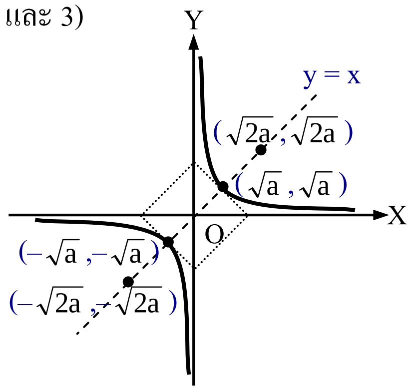
   จะได้ $3x + 4y + 10 = 0$ กับ $3x - 4y + 2 = 0$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{3} = \frac{32}{3}$ หน่วย
8. ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{5}{3}$

ไฮเพอร์โบลามุมฉาก(Rectangular Hyperbola) ที่ควรรู้

ไฮเพอร์โบลามุมฉาก คือ ไฮเพอร์โบลาที่มีความยาวของแกนตามขวาง**เท่ากับ**ความยาวของแกนสังยุค เช่น $x^2 - y^2 = 4$, $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$, $xy = 9$, $xy = -4$, $xy - y = 5$, $xy - x = -3$ เป็นต้น

สมการไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูป $xy = a$ เมื่อ $a > 0$ จะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก (กราฟอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 และ 3)
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)
3. แกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y = x$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $(\sqrt{a}, \sqrt{a})$ และ $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$
5. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{2a}, \sqrt{2a})$ และ$(-\sqrt{2a}, -\sqrt{2a})$
6. เส้นกำกับคือแกน X และแกน Y

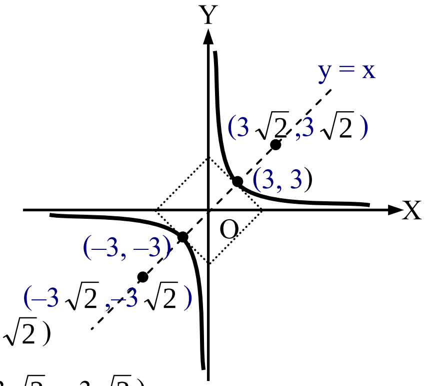


เช่น สมการไฮเพอร์โบลา $xy = 9$

1. เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)
3. แกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y = x$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $(\sqrt{a}, \sqrt{a}) = (\sqrt{9}, \sqrt{9}) = (3, 3)$

   และ $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}) = (-\sqrt{9}, -\sqrt{9}) = (-3, -3)$
5. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{2a}, \sqrt{2a}) = (\sqrt{2(9)}, \sqrt{2(9)}) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

   และ $(-\sqrt{2a}, -\sqrt{2a}) = (-\sqrt{2(9)}, -\sqrt{2(9)}) = (-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$
6. เส้นกำกับคือ แกน X และ แกน Y

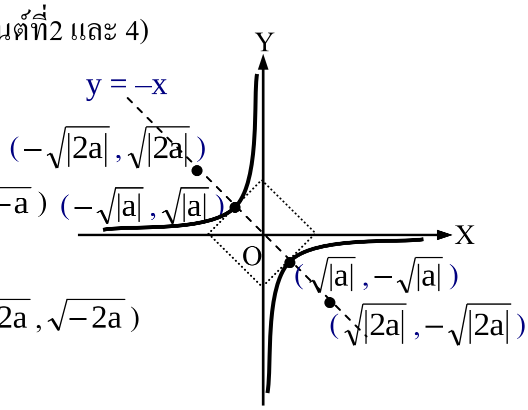


สมการไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูป $xy = a$ เมื่อ $a < 0$ จะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก (กราฟอยู่ในควอดรันต์ที่2 และ 4)
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)
3. แกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y = -x$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $(\sqrt{-a}, -\sqrt{-a})$ และ $(-\sqrt{-a}, \sqrt{-a})$

   หรือ $(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|})$ และ $(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|})$
5. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{-2a}, -\sqrt{-2a})$ และ $(-\sqrt{-2a}, \sqrt{-2a})$

   หรือ $(\sqrt{|2a|}, -\sqrt{|2a|})$ และ $(-\sqrt{|2a|}, \sqrt{|2a|})$
6. เส้นกำกับคือ แกน X และแกน Y

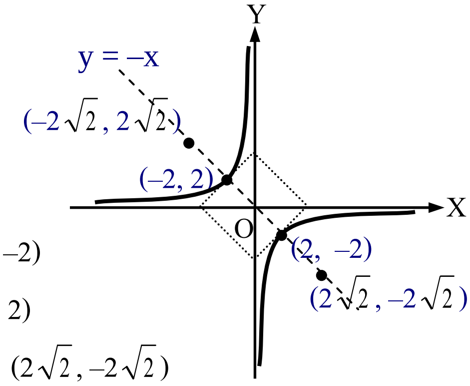


เช่น สมการไฮเพอร์โบลา $xy = -4$

1. เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)
3. แกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y = -x$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|}) = (\sqrt{4}, -\sqrt{4}) = (2, -2)$

   และ $(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|}) = (-\sqrt{4}, \sqrt{4}) = (-2, 2)$
5. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{|2a|}, -\sqrt{|2a|}) = (\sqrt{8}, -\sqrt{8}) = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

   และ $(-\sqrt{|2a|}, \sqrt{|2a|}) = (-\sqrt{8}, \sqrt{8}) = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
6. เส้นกำกับคือ แกน X และแกน Y



สมการไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูป $(x - h)(y - k) = a$ เมื่อ $a > 0$ จะมีลักษณะดังนี้

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

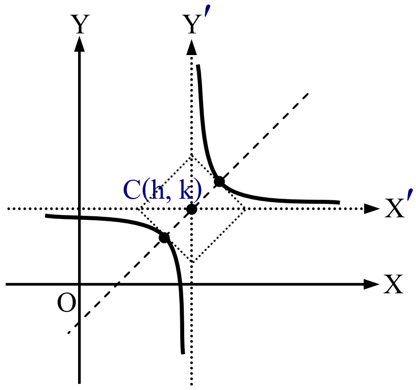
เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = k$)

และ แกน Y' (เส้นตรง $x = h$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$x'y' = a$ เมื่อ $a > 0$

เลื่อนแกนไปที่จุด (h, k) เขียนกราฟได้ดังรูป



เช่น จงเขียนกราฟของสมการ

(1) $(x - 2)(y + 3) = 9$

วิธีทำ จาก $(x - 2)(y + 3) = 9$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

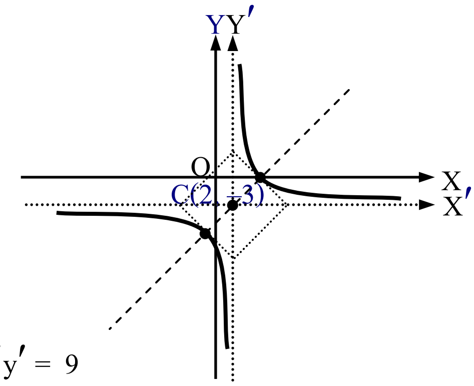
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (2, –3)

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = -3$)

และ แกน Y' (เส้นตรง $x = 2$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ $x'y' = 9$

เลื่อนแกนไปที่จุด (2, –3) เขียนกราฟได้ดังรูป



(2) $xy - 6x = 1$

วิธีทำ จาก $xy - 6x = 1$ จะได้ $x(y - 6) = 1$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(0, 6)

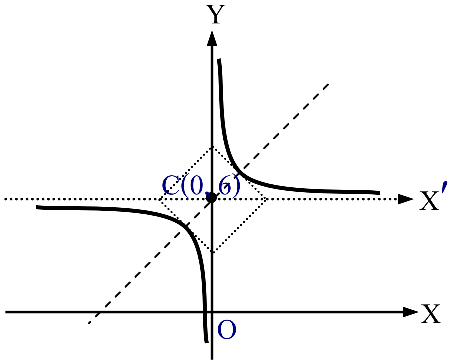
เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = 6$)

และ แกน Y (เส้นตรง $x = 0$)

จะได้ สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$$x'y' = 1$$

เลื่อนแกนไปที่จุด (0, 6) เขียนกราฟได้ดังรูป



(3) $xy - 2y - 4x = 0$

วิธีทำ จาก $xy - 2y - 4x = 0$

จะได้ $y(x - 2) - 4x = 0$

$$y(x - 2) - 4(x - 2) = 8$$

$$(x - 2)(y - 4) = 8$$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

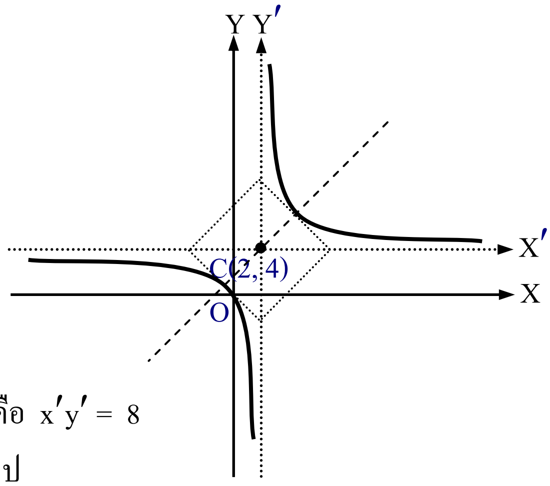
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(2, 4)

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = 4$)

และ แกน Y' (เส้นตรง $x = 2$)

จะได้ สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ $x'y' = 8$

เลื่อนแกนไปที่จุด (2, 4) เขียนกราฟได้ดังรูป



สมการไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูป $(x - h)(y - k) = a$ เมื่อ $a < 0$ จะมีลักษณะดังนี้

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

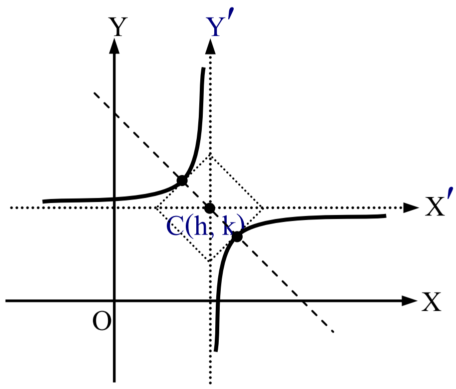
เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = k$)

และ แกน Y' (เส้นตรง $x = h$)

จะได้ สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

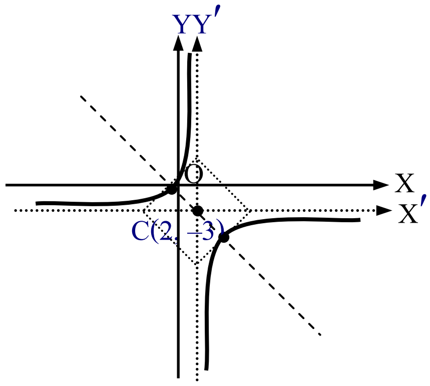
$$x'y' = a \quad \text{เมื่อ } a < 0$$

เลื่อนแกนไปที่จุด (h, k) เขียนกราฟได้ดังรูป



เช่น จงเขียนกราฟของสมการ

(1) $(x-2)(y+3) = -9$



วิธีทำ จาก $((x-2)(y+3) = -9$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, -3)$

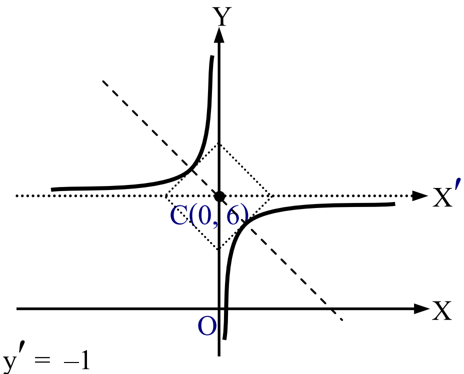
เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = -3$)

และ แกน Y' (เส้นตรง $x = 2$)

จะได้ สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ $x'y' = -9$

เลื่อนแกนไปที่จุด $C(2, -3)$ เขียนกราฟได้ดังรูป

(2) $xy - 6x = -1$



วิธีทำ จาก $xy - 6x = -1$ จะได้ $x(y-6) = -1$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 6)$

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = 6$)

และ แกน Y (เส้นตรง $x = 0$)

จะได้ สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ $x'y' = -1$

เลื่อนแกนไปที่จุด $C(0, 6)$ เขียนกราฟได้ดังรูป

(3) $xy + 2y - 4x = 0$

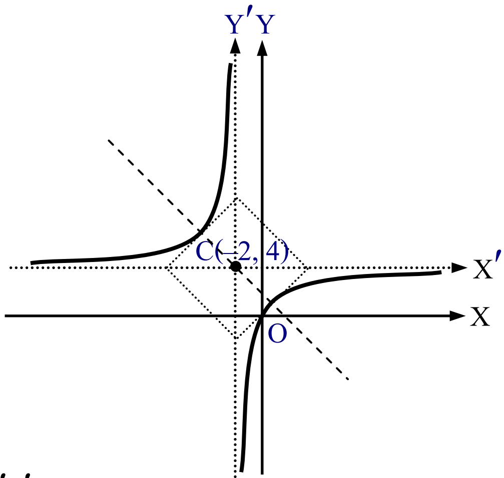
วิธีทำ จาก $xy + 2y - 4x = 0$

จะได้ $(xy + 2y) - 4x = 0$

$y(x+2) - 4x = 0$

$y(x+2) - 4(x+2) = -8$

$(x+2)(y-4) = -8$



เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(-2, 4)$

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = 4$)

และ แกน Y' (เส้นตรง $x = -2$)

จะได้ สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ $x'y' = -8$

เลื่อนแกนไปที่จุด $C(-2, 4)$ เขียนกราฟได้ดังรูป

ใบกิจกรรมที่ 3.2.5

1. จงบอกชื่อกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

   (1) $\{ (x, y) \mid 2x = 3y \}$

   ....

   (2) $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

   ....

   (3) $\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 = 1 \}$

   ....

   (4) $\{ (x, y) \mid 2y^2 = 3x + 5 \}$

   ....

   (5) $\{ (x, y) \mid 9y^2 - x^2 - 45 = 0 \}$

   ....

   (6) $\{ (x, y) \mid 5x^2 + 10x + y^2 = 100 \}$

   ....

2. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (1) ผลต่างของระยะจากไฮเพอร์โบลาจุดใดๆบนไปยังจุด $(-10, 0)$ และ $(10, 0)$ เท่ากับ 16 หน่วย

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (2) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -4)$ และ $(0, 4)$ และผลต่างคงตัวเท่ากับ 4 หน่วย

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

(3) จุดยอดอยู่ที่ (–3, 0) และ (3, 0) และจุดโฟกัสอยู่ที่ (–5, 0) และ (5, 0)

(4) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, –6) และ (0, 6) และแกนสังยุคยาว 10 หน่วย

(5) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, –5) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (0, –2) แกนตามขวางยาว 4 หน่วย

3. จากสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม ความเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

(2) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

(3) $4x^2 - 9^2 = 36$

(4) $y^2 - 4x - 100 = 0$

(5) $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

(6) $25(y-3)^2 - 9(x-1)^2 = 225$

แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 3.2 เรื่องภาคตัดกรวย

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียวแล้วทำเครื่องหมายกากบาท(×) ลงในกระดาษคำตอบ

1. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และรัศมียาว 5 หน่วยคือข้อใด
   1. $x^2 + y^2 = 5$
   2. $x^2 + y^2 = 10$
   3. $4x^2 + 4y^2 = 100$
   4. $5x^2 + 5y^2 = 100$

2. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 2) และรัศมียาว 3 หน่วยคือข้อใด
   1. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$
   2. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$
   3. $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$
   4. $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

3. ถ้าสมการวงกลม $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 2 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และมีรัศมี r หน่วย แล้ว $h + k + r$ เท่ากับข้อใด
   1. 1
   2. 2
   3. 3
   4. 4

4. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด (0, 0) และโฟกัสอยู่ที่จุด (5, 0) คือข้อใด
   1. $x^2 + 20y = 0$
   2. $x^2 - 20y = 0$
   3. $y^2 + 20x = 0$
   4. $y^2 - 20x = 0$

5. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด (0, 0) และมีเส้นตรง $y = -3$ เป็นไดเรกตริกซ์ คือข้อใด
   1. $x^2 + 6y = 0$
   2. $x^2 - 6y = 0$
   3. $y^2 + 6x = 0$
   4. $y^2 - 6x = 0$

6. สมการพาราโบลา $y^2 - 2y - 20x + 61 = 0$ ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**
   1. จุดยอดอยู่ที่จุด (1, 3)
   2. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (6, 3)
   3. แกนพาราโบลาขนานกับแกน X
   4. เส้นตรงไดเรกตริกซ์ คือ $y = -2$

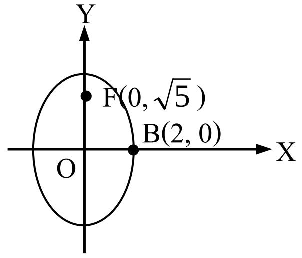
7. พาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + 6x + y^2 = 0$ และมีเส้นตรง $x - 3 = 0$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ มีสมการเท่ากับข้อใด
   1. $x^2 = 12y$
   2. $x^2 = -12y$
   3. $y^2 = 12x$
   4. $y^2 = -12x$

8. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และมีแกน Y เป็นแกนสมมาตรถ้าโฟกัสของพาราโบลานี้อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ คือสมการข้อใด
   1. $x^2 - 12y = 0$ หรือ $x^2 + 20y = 0$
   2. $x^2 + 12y = 0$ หรือ $x^2 - 20y = 0$
   3. $y^2 - 12x = 0$ หรือ $y^2 + 20x = 0$
   4. $y^2 + 12x = 0$ หรือ $y^2 - 20x = 0$

9. ข้อใดเป็นสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
   1. $x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$
   2. $x^2 + 4x + 20y - 56 = 0$
   3. $x^2 + 4x - 20y - 56 = 0$
   4. $x^2 + 4x + 20y + 56 = 0$

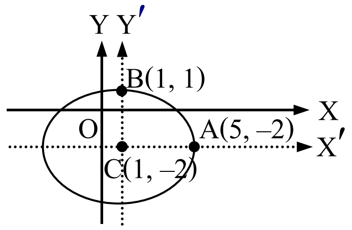
10. ถ้าวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) ซึ่งมีแกนเอกยาว 8 หน่วย และมีจุดปลายแกนโทจุดหนึ่งคือ (0, 3) แล้วสมการวงรีเท่ากับสมการใด
    1. $3x^2 + 4y^2 = 12$
    2. $4x^2 + 3y^2 = 12$
    3. $9x^2 + 16y^2 = 144$
    4. $16x^2 + 9y^2 = 144$

11. รูปข้างล่างนี้เป็นกราฟของสมการข้อใด



1. $4x^2 + 9y^2 = 36$
2. $4x^2 + 5y^2 = 20$
3. $9x^2 + 4y^2 = 36$
4. $5x^2 + 4y^2 = 20$

12. รูปข้างล่างนี้เป็นกราฟของสมการข้อใด



1. $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$
2. $9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0$
3. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$
4. $16x^2 + 9y^2 - 64x - 18y - 71 = 0$

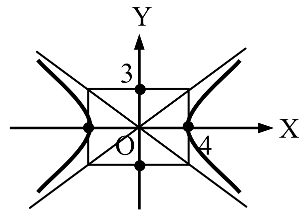
13. สมการวงรี $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ ข้อใดต่อไปนี้**กล่าวผิด**

1. แกนเอกยาว 10 หน่วย
2. แกนโทยาว 9 หน่วย
3. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (–2, 1)
4. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (2, 6) และ (2, –2)

14. ถ้าสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0)แกนตามขวางอยู่บนแกน Y ยาว 6 หน่วย และมีจุดปลายแกนสังยุดจุดหนึ่งคือจุด (5, 0) แล้วสมการไฮเพอร์โบลาดังกล่าวคือข้อใด

1. $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$
2. $9x^2 - 25y^2 + 225 = 0$
3. $25x^2 - 9y^2 - 225 = 0$
4. $25x^2 - 9y^2 + 225 = 0$

15. รูปข้างล่างนี้เป็นกราฟของสมการข้อใด



1. $9x^2 - 16y^2 = 144$
2. $16x^2 - 9y^2 = 144$
3. $9x^2 - 25y^2 = 225$
4. $25x^2 - 9y^2 = 225$

16. จากสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ข้อใดกล่าวผิด

$$25x^2 - 9y^2 + 50x + 36y = 236$$

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3, –2)
2. จุดยอดอยู่ที่จุด (–4, 2) และ (1, 2)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(-1 - \sqrt{34}, 2)$ และ $(-1 + \sqrt{34}, 2)$
4. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด (–1, –3) และ (–1 , 7)

17. ข้อใดเป็นสมการภาคตัดกรวยลดรูป

1. $x^2 + y^2 = 1$
2. $x^2 - y^2 = 1$
3. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 9 = 0$

18. สมการข้อใดภาคตัดกรวยลดรูปที่มีกราฟเป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

1. $x^2 - \dfrac{y^2}{25} = 0$
2. $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10 = 0$
3. $5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 11 = 0$
4. $9x^2 + 5y^2 + 36x - 20y - 124 = 0$

บันทึกความจำ