

ตรรกศาสตร์



- Miss Thanida chiramongkolsiri (P'Sin)

ประพจน์

คือ ประโยคที่บอกค่าความจริง (truth value) ได้
ว่าเป็น**จริง** (true) หรือ **เท็จ** (False) **เพียงอย่างเดียว**
หนึ่งเท่านั้น ข้อความดังกล่าวอาจอยู่ในรูปประโยค
บอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธก็ได้

ตัวอย่างประโยคที่ไม่เป็นประพจน์

1. ประโยคคำถาม **เช่น** ใครกันนะ
2. ประโยคคำสั่ง **เช่น** จงนั่งลง
3. ประโยคขอร้อง **เช่น** ช่วยปิดหน้าต่างให้หน่อย
4. ประโยคอุทาน **เช่น** โปรดเมตตาด้วยเถิด
5. ประโยคแสดงความปรารถนา **เช่น** ฉันอยากเป็นนก
6. ประโยคอุทาน **เช่น** อู๊ย เจ็บ
7. สุภาษิตคำพังเพย **เช่น** น้ำลดตอพุด
8. ประโยคเปิด **เช่น** เขาเป็นคารานักร้อง

๘ ข้อควรจำ ๘

ประโยชน์ที่ไม่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ

ไม่เป็นประพจน์ เช่น ประโยคคำถาม ประโยคคำสั่ง ห้าม ขอร้อง
อ้อนวอน ประโยคแสดงความปรารถนา หรือประโยคอุทาน



ข้อความต่อไปนี้ เป็นประพจน์หรือไม่

ดาวพุธเป็นดาวเคราะห์

จังหวัดเชียงใหม่ไม่อยู่ทางภาคใต้ของประเทศไทย

น้ำนิ่งไหลลึก

$$17 + 8 = 25$$

5 เป็นจำนวนตรรกยะ ใช่ไหม

เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต

7 เป็นเลขคู่

10 หารด้วย 2 เท่ากับ 5 ใช่หรือไม่

โธ่เอ๊ย เวิร์กกรรมอะไรเช่นนี้

ในตรรกศาสตร์การเป็น **จริง** หรือ **เท็จ** ของแต่ละ
ประพจน์ เรียกว่า **ค่าความจริง** (truth value) ของประพจน์

เช่น $3 = 1 + 2$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเป็น
จริง หรือกล่าวสั้นๆ ได้ว่า $3 = 1 + 2$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ค่าความจริงของประพจน์ (Truth values)

1. ค่าความจริงเป็น**จริง** (true) จะใช้ **T** แทนค่าความจริงที่เป็น**จริง**
2. ค่าความจริงเป็น**เท็จ** (false) จะใช้ **F** แทนค่าความจริงที่เป็น**เท็จ**

จงบอกค่าความจริงของประพจน์

ธงชาติไทยมี 3 สี

จอร์จบูธ เป็นนายกรัฐมนตรีของไทย

$$1+3=4$$

แมวทุกตัวมีขนสีดำ

ดอกกุหลาบบางชนิดมีสีขาว

ประพจน์ในตรรกศาสตร์มี 2 ลักษณะ คือ

1. ประพจน์เดี่ยว (Simple proposition) เช่น ตะกั่วเป็นโลหะ

2. ประพจน์เชิงประกอบ (Compound proposition) เช่น ตะกั่วเป็นโลหะ และ ทองเป็นโลหะ

ประพจน์เชิงประกอบ

คือ การนำประโยคเชิงเดี่ยวหลายๆประโยคมาเชื่อมต่อกัน
ด้วยตัวเชื่อม(connective) ได้แก่

คำว่า

1. "และ"(and)
2. "หรือ"(or)
3. "ถ้า....แล้ว...." (if....then)
4. "ก็ต่อเมื่อ" (if.....and only if.....)
5. "ไม่"(not)

เช่น จากประโยคเดียว

2 น้อยกว่า 4 ----- 1

2 เป็นเลขคู่ ----- 2

เราสามารถสร้างประโยคเชิงประกอบ ใหม่ได้ดังนี้

2 น้อยกว่า 4 และ 2 เป็นเลขคู่

2 น้อยกว่า 4 หรือ 2 เป็นเลขคู่

ถ้า 2 น้อยกว่า 4 แล้ว 2 เป็นเลขคู่

2 น้อยกว่า 4 ก็ต่อเมื่อ 2 เป็นเลขคู่

2 ไม่น้อยกว่า 4

ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์

สัญลักษณ์

และ

\wedge

หรือ

\vee

ถ้า...แล้ว

\rightarrow

ก็ต่อเมื่อ

\leftrightarrow

ไม่

\neg

การเขียนสัญลักษณ์แทนประพจน์

ประพจน์เดียว

P แทน “2 น้อยกว่า 4”

Q แทน “2 เป็นเลข คู่”

ประพจน์เชิงประกอบ

$P \wedge Q$ แทน “2 น้อยกว่า 4 และ 2 เป็นเลขคู่”

$P \vee Q$ แทน “2 น้อยกว่า 4 หรือ 2 เป็นเลขคู่”

$P \rightarrow Q$ แทน “ถ้า 2 น้อยกว่า 4 แล้ว 2 เป็นเลขคู่”

$P \leftrightarrow Q$ แทน “2 น้อยกว่า 4 ก็ต่อเมื่อ 2 เป็นเลขคู่”

$\sim P$ แทน “2 ไม่น้อยกว่า 4”

ประโยครวม (Conjunction)

คือ ประโยคที่ได้จากการเชื่อม ประโยคสอง
ประโยค ในลักษณะที่เป็นการยืนยันทั้งสองส่วน
โดยใช้ตัวเชื่อม **และ (and)**

เราใช้สัญลักษณ์ \wedge

ประโยครวมมีรูปแบบทั่วไปเป็น $P \wedge Q$

ตารางค่าความจริงของประโยครวม $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตัวอย่าง

$5+1=6$ และ 2 น้อยกว่า 3 (จริง)

$5+1=6$ และ 2 มากกว่า 3 จุดสังเกต คือ **จริงทั้งคู่เป็นจริง**

$5+1=1$ และ 2 น้อยกว่า 3 (เท็จ)

$5+1=1$ และ 2 มากกว่า 3 (เท็จ)

ประโยคเลือก(Disjunction)

คือ ประโยคที่ได้จากการเชื่อมประโยค 2
ประโยคในลักษณะการรับรองอย่างน้อยหนึ่งส่วน
ตัวเชื่อมของประโยคเลือก คือเชื่อม **หรือ** (or)
แทนด้วยสัญลักษณ์ **v**
ประโยคเลือกมีรูปแบบทั่วไป คือ **PvQ**

ตารางค่าความจริงของประโยคเลือก PvQ

P	Q	PvQ
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตัวอย่าง

5+1 จุดสังเกต คือ **เท็จทั้งคู่เป็นเท็จ**

5+1

5+1=1 หรือ 2 น้อยกว่า 3 (จริง)

5+1=1 หรือ 2 มากกว่า 3 (เท็จ)

ประโยคเงื่อนไข (Condition)

คือ ประโยคที่แสดงเงื่อนไขหรือเหตุผล ตัวเชื่อม
ของประโยคเงื่อนไข คือตัวเชื่อม “ถ้า.....แล้ว....”
(if....then....)

แทนด้วยสัญลักษณ์ \rightarrow

มีรูปแบบทั่วไป $P \rightarrow Q$

ตารางค่าความจริงของประโยคเลือก $P \rightarrow Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตัวอย่าง

จุดสังเกต คือ หน้าจริงหลังเท็จเป็นเท็จ

ถ้า $1 < 2$ แล้ว $3 < 2$ (เท็จ)

ถ้า $2 < 1$ แล้ว $2 < 3$ (จริง)

ถ้า $2 < 1$ แล้ว $3 < 2$ (จริง)

ประโยคเงื่อนไขสองทาง (Bicondition)

คือประโยคที่แสดงเงื่อนไขหรือเหตุผล ตัวเชื่อมของ
ประโยคเงื่อนไข คือตัวเชื่อม “..... ก็ต่อเมื่อ”(...
if and only if....)

ใช้สัญลักษณ์ทั่วไป $P \leftrightarrow Q$

ซึ่งประโยคนี้จะมีความหมายเดียวกับ

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

ตารางค่าความจริงของประโยคเงื่อนไขสองทาง $P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ตัวอย่าง

จุดสังเกต คือ เหมือนกันจริงต่างกันเท็จ

$1 < 2$ ก็ต่อเมื่อ $3 < 2$ (เท็จ)

$2 < 1$ ก็ต่อเมื่อ $2 < 3$ (เท็จ)

$2 < 1$ ก็ต่อเมื่อ $3 < 2$ (จริง)

ประโยคนิเสธ (Negations)

คือ ประโยคที่แสดงค่าความจริงตรง
ข้ามกับประโยคเดิม

สัญลักษณ์ทั่วไป คือ \sim

$\sim P$ แทนนิเสธของประโยค P

ตารางค่าความจริง ของประโยค $\sim P$

P	$\sim P$
T	F
F	T

จุดสังเกต คือ ค่าความจริงตรงข้าม

ประโยค ฉนวน นเสธคือ ฉนวน

ประโยค ฉนวนไม่หิว นเสธคือ ฉนวนหิว

ตารางค่าความจริง(Truth value Table)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$\sim P$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

สรุปข้อสังเกต

ตัวเชื่อม \leftrightarrow จุดสังเกต คือ เหมือนกันจริงต่างกันเท็จ

ตัวเชื่อม \sim จุดสังเกต คือ ค่าความจริงตรงข้าม

ตัวเชื่อม \rightarrow จุดสังเกต คือ หน้าจริงหลังเท็จเป็นเท็จ



การหาค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อน

แบ่งได้ 3 กรณี

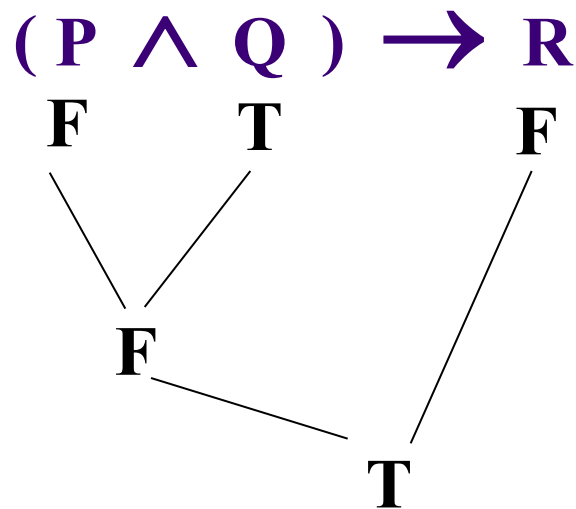
1. กรณีที่เราทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวทุกตัว

2. กรณีที่เราทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวบางตัว

3. กรณีที่เราไม่ทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวเลย

1. กรณีที่เราทราบค่าความจริงของประพจน์เชิงเดียวทุกตัว

ตัวอย่าง ให้ P มีค่าความจริงเป็น F , Q มีค่าความจริงเป็น T , R มีค่าความจริงเป็น F
จงหาค่าความจริงของ $(P \wedge Q) \rightarrow R$



เพราะฉะนั้น ประโยคนี้มีค่าความจริงเป็น จริง

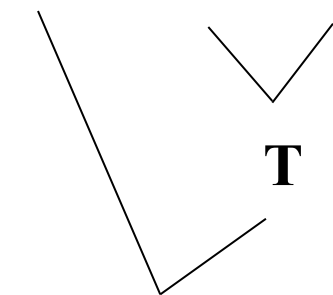
กำหนด p q มีค่าความจริงเป็นจริง และ r มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงวิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

วิธีทำ

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

T **T** **F**

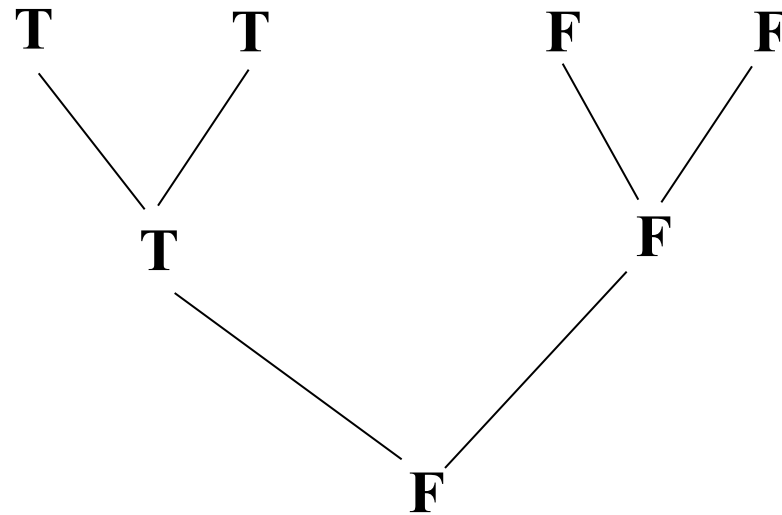


T

เพราะฉะนั้น ประโยคนี้มีค่าความจริงเป็น จริง

ตัวอย่าง ให้ P มีค่าความจริงเป็น F , Q มีค่าความจริงเป็น T ,
R มีค่าความจริงเป็น T จงหาค่าความจริงของ

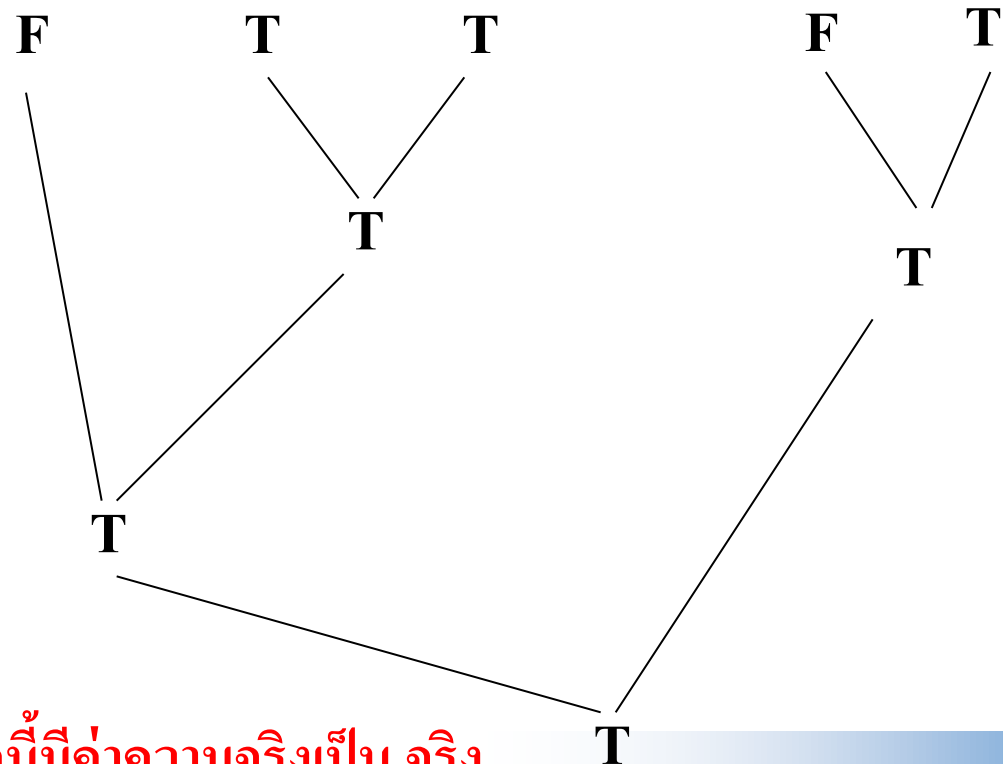
$$(\sim P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim R)$$



เพราะฉะนั้น ประโยคนี้มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ตัวอย่าง ให้ P มีค่าความจริงเป็น F , Q มีค่าความจริงเป็น T ,
R มีค่าความจริงเป็น T จงหาค่าความจริงของ

$$[P \vee (Q \rightarrow R)] \rightarrow (\sim Q \vee R)$$



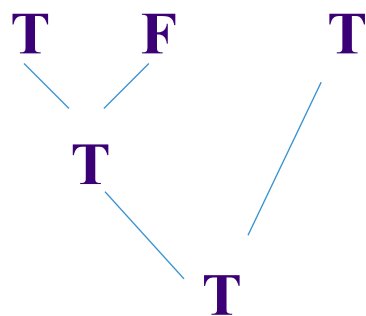
เพราะฉะนั้น ประโยคนี้มีค่าความจริงเป็น จริง

ตัวอย่าง หาค่าความจริงของ $(P \vee Q) \longrightarrow P$

โดย P เป็น จริง

Q เป็น เท็จ

$(P \vee Q) \longrightarrow P$



เพราะฉะนั้น ประโยคนี้มีค่าความจริงเป็น จริง

จงหาค่าความจริงของประโยค $P \wedge (Q \rightarrow (R \vee \sim P))$ เมื่อกำหนดว่า
P เป็น จริง , Q เป็น เท็จ , R เป็น เท็จ

$$P \wedge (Q \rightarrow (R \vee \sim P))$$

ตัวอย่าง ถ้า $7-5=2$ หรือ $2+8=1$ แล้ว $7-5=2$ มีค่าความจริงเป็น
จริงหรือเท็จ

P แทน $7-5=2$ มีค่าความจริงเป็น จริง (T)

Q แทน $2+8=1$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ (F)

เขียนในรูป สัญลักษณ์ ได้ $(P \vee Q) \longrightarrow P$

P แทน $7-5=2$ มีค่าความจริงเป็น จริง (T)

Q แทน $2+8=1$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ (F)

เขียนในรูป สัญลักษณ์ ได้ $(P \vee Q) \longrightarrow P$

แบ่งได้ 3 กรณี

1. กรณีที่เราทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวทุกตัว

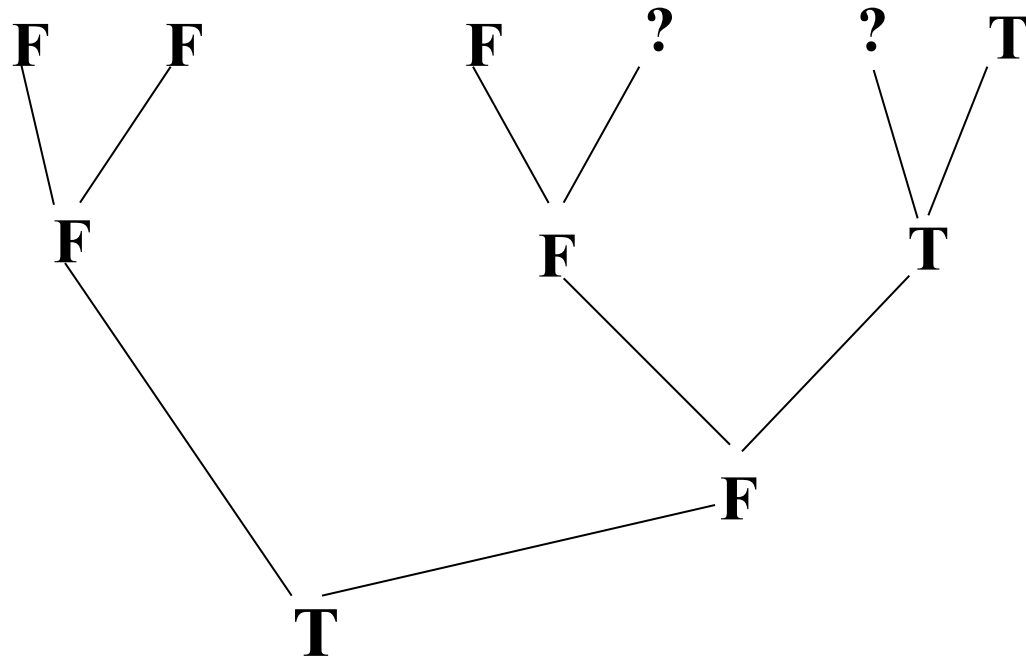
2. กรณีที่เราทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวบางตัว

3. กรณีที่เราไม่ทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวเลย

2. กรณีที่เราทราบค่าความจริงของประพจน์เชิงเดี่ยวบางตัว

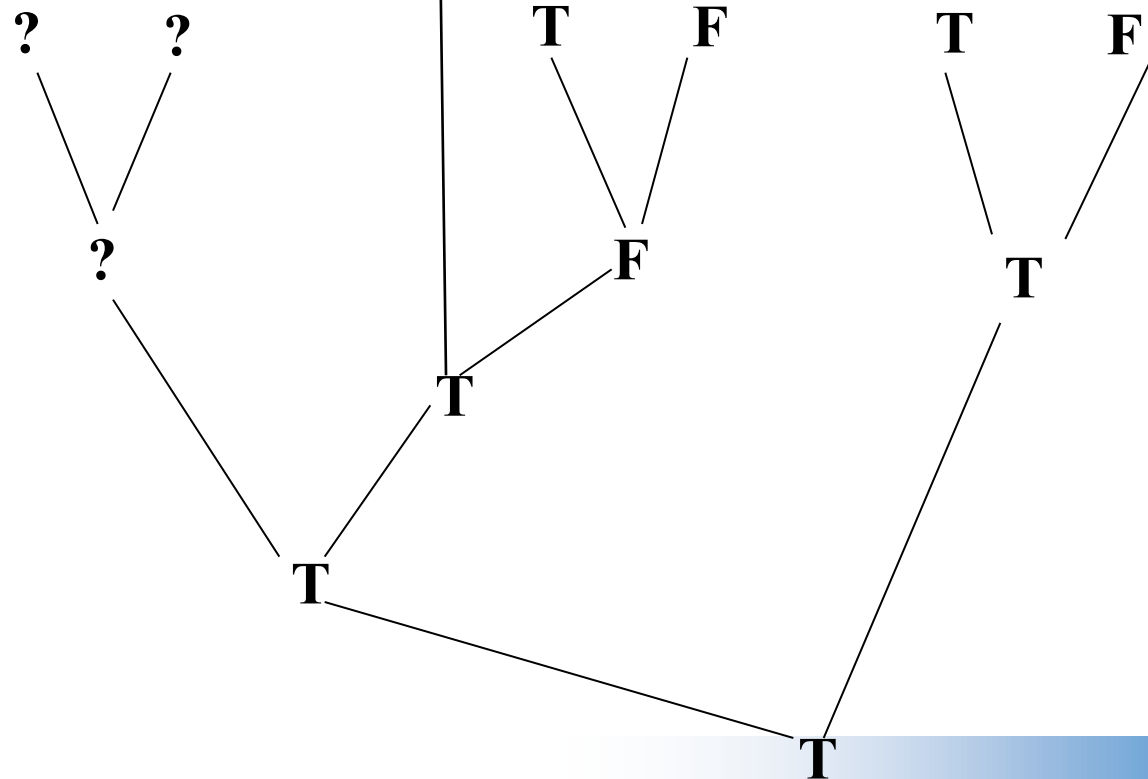
ตัวอย่างที่ เมื่อกำหนด A, B และ C เป็น T, T และ F จงหาค่าความจริงของประพจน์

$$(\sim A \vee \sim B) \rightarrow [(\sim A \wedge S) \leftrightarrow (R \vee B)]$$



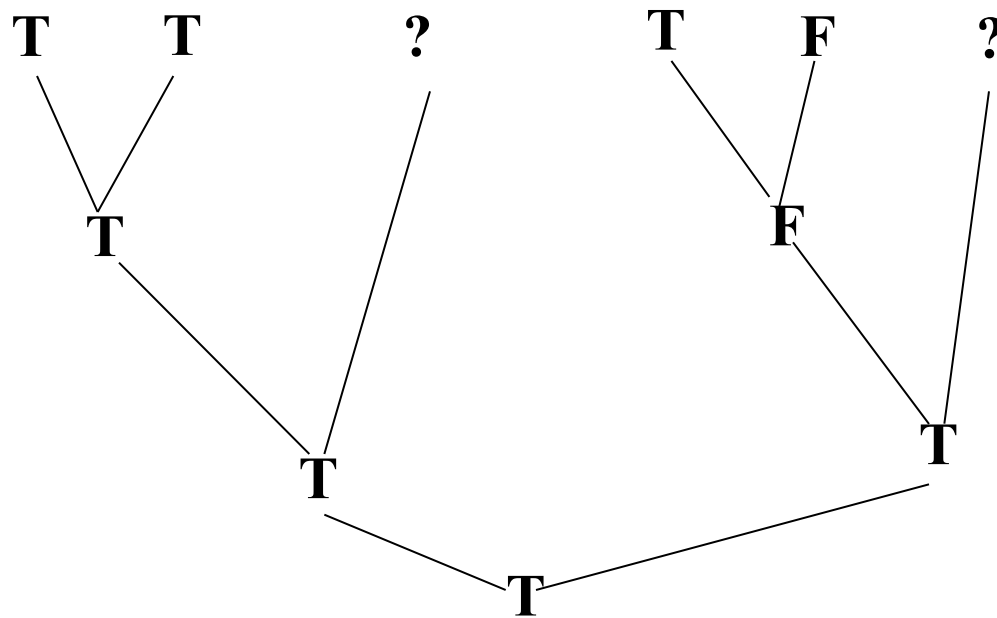
ตัวอย่างที่ เมื่อกำหนด A, B และ C เป็น T, T และ F จงหาค่าความจริงของประพจน์

$$[(S \vee P) \rightarrow \sim (A \wedge C)] \vee (B \vee \sim B)$$



ตัวอย่างที่ ถ้า $P \rightarrow Q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริง
ของประพจน์

$$[(P \wedge \sim Q) \vee R] \rightarrow [(P \wedge Q) \rightarrow R]$$

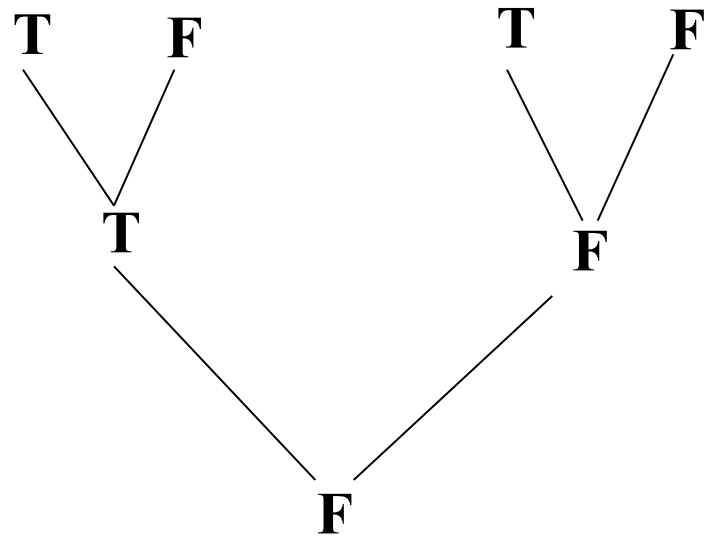


ตัวอย่างที่ ถ้า $P \wedge \sim Q$ และ $P \rightarrow R$ มีค่าความจริงเป็นจริง
จงหาค่าความจริงของประพจน์

Note

$P \wedge \sim Q$ และ $P \rightarrow R$
T T T T
F

$(P \vee \sim R) \rightarrow (R \leftrightarrow Q)$



แบ่งได้ 3 กรณี

1. กรณีที่เราทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวทุกตัว

2. กรณีที่เราทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวบางตัว

3. กรณีที่เราไม่ทราบค่าความจริงของ
ประพจน์เชิงเดียวเลย

3. กรณีที่เราไม่ทราบค่าความจริงของประพจน์เชิงเดียวเลย

ถ้าประพจน์เชิงเดียวมีทั้งหมด n ประพจน์จะต้องวิเคราะห์ทั้งหมด 2^n กรณี

ตัวอย่างที่ 11 จงวิเคราะห์หาค่าความจริงของ

1. $P \vee \sim P$

P	$\sim P$	$P \vee \sim P$
T	F	T
F	T	T

2. $\sim P \wedge \sim Q$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

3. $(P \vee Q) \rightarrow \sim P$

P	Q	$P \vee Q$	$\sim P$	$(P \vee Q) \rightarrow \sim P$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

4. $(P \wedge Q) \rightarrow R$

P	Q	$(P \wedge Q)$	R	$(P \wedge Q) \rightarrow R$
T	T	T	T	T
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	F	T	T
F	F	F	F	T

สัจนิรันดร์และประพจน์ขัดแย้ง

- 1) ค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อน เป็นจริงทุกกรณี
จะเรียกประพจน์นั้นว่า “**สัจนิรันดร์**” (tautology)
- 2) ค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อน เป็นเท็จทุกกรณี
จะเรียกประพจน์นั้นว่า “**ประพจน์ขัดแย้ง**”
(contradictory propositions)
- 3) ค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อน เป็นจริงบ้าง เท็จบ้าง
จะเรียกประพจน์นั้นว่า “**contingent**”

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$
T				
T				
F				
F				

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$
T	T	F		
T	F	F		
F	T	T		
F	F	T		

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$
T	T	F	T	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	F	T	T	

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$
T	T	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

เพราะฉะนั้นประพจน์ $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P$ เป็น “contingent”

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow P$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow P$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$
T			
T			
F			
F			

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow P$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow P$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	T	
T	F	F	
F	T	F	
F	F	F	

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow P$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

เพราะฉะนั้นประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow P$ เป็น สัจนิรันดร์

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์

$$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

P	Q	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$	$P \wedge Q$	$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์

$$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

P	Q	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$	$P \wedge Q$	$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
T					
T					
F					
F					

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์

$$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

P	Q	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$	$P \wedge Q$	$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์

$$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

P	Q	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$	$P \wedge Q$	$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
T	T	F			
T	F	T			
F	T	F			
F	F	T			

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์

$$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

P	Q	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$	$P \wedge Q$	$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
T	T	F	F		
T	F	T	T		
F	T	F	T		
F	F	T	T		

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์

$$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

P	Q	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$	$P \wedge Q$	$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
T	T	F	F	T	
T	F	T	T	F	
F	T	F	T	F	
F	F	T	T	F	

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์

$$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

P	Q	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$	$P \wedge Q$	$(P \rightarrow \sim Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

เพราะฉะนั้นประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow P$ เป็น ประพจน์ขัดแย้ง

พิจารณาค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

เพราะฉะนั้นประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ เป็น ตัจนิรันดร์

ประพจน์ที่สมมูลกัน หรือประพจน์ที่เทียบเท่ากัน (logical equivalent propositions)

การวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อน 2
ประพจน์ ถ้าค่าความจริงของประพจน์เชิงซ้อนทั้ง 2 มีค่า
ความจริงเหมือนกันทุกกรณี กรณีต่อกรณี สามารถนำไปใช้
แทนกันได้ จะเรียกว่า ประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน หรือเป็น
ประพจน์ที่เทียบเท่ากัน

ถ้าประพจน์ A สมมูลกับประพจน์ B

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \equiv B$

ถ้าประพจน์ A ไม่สมมูลกับประพจน์ B

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \not\equiv B$

ตัวอย่าง

จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $A \rightarrow B$ และ $\sim B \rightarrow \sim A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim B \rightarrow \sim A$

ตัวอย่าง

จงวิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ $A \rightarrow B$ และ $\sim B \rightarrow \sim A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim B \rightarrow \sim A$
T					
T					
F					
F					

ตัวอย่าง

จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $A \rightarrow B$ และ $\sim B \rightarrow \sim A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim B \rightarrow \sim A$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

ตัวอย่าง

จงวิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ $A \rightarrow B$ และ $\sim B \rightarrow \sim A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim B \rightarrow \sim A$
T	T	T			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			

ตัวอย่าง

จงวิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ $A \rightarrow B$ และ $\sim B \rightarrow \sim A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim B \rightarrow \sim A$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T

ตัวอย่าง

จงวิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ $A \rightarrow B$ และ $\sim B \rightarrow \sim A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim B \rightarrow \sim A$
T	T	T	F	F	
T	F	F	F	T	
F	T	T	T	F	
F	F	T	T	T	

ตัวอย่าง

จงวิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ $A \rightarrow B$ และ $\sim B \rightarrow \sim A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim B \rightarrow \sim A$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T

จากตารางวิเคราะห์หาค่าความจริงจะพบว่า $A \rightarrow B$ และ $\sim B \rightarrow \sim A$ มีค่าความจริงเหมือนกันทุกประการ เพราะฉะนั้น $A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$

จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \wedge q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$

จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \wedge q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T				
T				
F				
F				

จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \wedge q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \wedge q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	F	T		

จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \wedge q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	T	F	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	F	T	T	

จงวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \wedge q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	F

ประโยคเปิด

บทนิยาม

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปรและเมื่อแทนค่าของตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์

กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนเต็ม

พิจารณา $2x + 1 = 3$ จะเห็นว่า เป็นประโยคเปิด เพราะมีตัวแปร x และเมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงใดๆ แล้วได้ประพจน์ เช่น

จาก $2x + 1 = 3$

แทน x ด้วย 0 ได้ $0 + 1 = 3$ เป็นเท็จ

แทน x ด้วย 1 ได้ $2 + 1 = 3$ เป็นจริง

แทน x ด้วย 2 ได้ $4 + 1 = 3$ เป็นเท็จ

พิจารณา $2x + 1 = 3$ จะเห็นว่า เป็นประโยคเปิด เพราะเมื่อ
แทน x ด้วยจำนวนจริงใดๆแล้วเป็นไปได้ทั้ง 2 อย่าง

ตัวบ่งปริมาณ

ในวิชาคณิตศาสตร์จะพบว่ามีการใช้ข้อความ สำหรับ x ทุกตัว และ สำหรับ x บางตัว เสมอ เช่น

สำหรับ x ทุกตัว $x + 0 = x$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

สำหรับ x บางตัว $x + x = x$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

หมายเหตุ

การเขียนสัญลักษณ์แทนประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ เราจะต้องเขียนเอกภพสัมพัทธ์กำกับไว้เสมอเพื่อจะได้ทราบขอบเขตของตัวแปรว่าแทนสิ่งใด แต่ในกรณีที่เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง มักนิยมละการเขียนเอกภพสัมพัทธ์ นอกจากนี้ในการศึกษาเกี่ยวกับเซตนิยมละการเขียนเอกภพสัมพัทธ์เช่นเดียวกัน

ตั้งงบประมาณมี 2 ชนิด

1. Universal Quantifiers คือ “สำหรับ...ทุกตัว”, “แต่ละค่าของ...” อ่านว่า “for all” เขียนแทนด้วย “ \forall ”
2. Existential Quantifiers คือ “สำหรับ... บางตัว”, “ มีอย่างน้อยหนึ่ง” อ่านว่า “for some” เขียนแทน “ \exists ”

ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว

การพิจารณาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณนั้น โดยทั่วไปจะพิจารณาแต่ละส่วนของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ ดังนี้

ส่วนที่ 1 ตัวบ่งปริมาณ

ส่วนที่ 2 ประโยคเปิด

ส่วนที่ 3 เอกภพสัมพัทธ์

การพิจารณาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

1. $\forall x[P(x)]$

- มีค่าความจริงเป็น T ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ทุกตัวใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงทั้งหมด
- มีค่าความจริงเป็น F ก็ต่อเมื่อ มีค่า x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่แทนใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริง

เป็นเท็จ

2. $\exists x[P(x)]$

- มีค่าความจริงเป็น T ก็ต่อเมื่อ มีค่า x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่แทนใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริง
- มีค่าความจริงเป็น F ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ทุกตัวใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งหมด

เป็นจริง

สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

ประโยคบางรูปแบบอาจจะต้องใช้พิจารณาจากบทนิยามของ
สมมูลหรือนิเสธ ดังนี้

“ประพจน์สองประพจน์จะสมมูลกันก็ต่อเมื่อมีค่าความจริง
เหมือนกันทุกกรณี”

“ประพจน์สองประพจน์จะเป็นนิเสธกันก็ต่อเมื่อมีค่าความจริง
ตรงกันข้ามกรณีต่อกรณี”

รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน และเป็นนิเสธกันที่ใช้วิธีพิจารณา ดังกล่าว

รูปแบบที่ 1 $\sim \forall x[P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x[\sim P(x)]$

กล่าวคือ นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x[\sim P(x)]$

พิสูจน์ ถ้า $\sim \forall x[P(x)]$ เป็นจริง

จะได้ว่า $\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ

ดังนั้น มีสมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์เมื่อนำไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ จะได้ว่า มีสมาชิก**บางตัว**ในเอกภพสัมพัทธ์เมื่อนำไปแทนค่า x ใน $\sim P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง นั่นคือ $\exists x[\sim P(x)]$ เป็นจริง

รูปแบบที่ 2 $\sim \exists x[P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim P(x)]$

กล่าวคือ นิเสธของ $\exists x[P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim P(x)]$

พิสูจน์ สมมุติว่า $\sim \exists x[P(x)]$ เป็นจริง
จะได้ว่า $\exists x[P(x)]$ เป็นเท็จ

ดังนั้น เมื่อแทนค่า x ใน $p(x)$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัว
ในเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ประพจน์ที่เป็นเท็จทั้งหมด

นั่นคือ เมื่อแทนค่า x ใน $\sim p(x)$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัว
ในเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ประพจน์ที่เป็นจริงทั้งหมด



Thank You !



จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

วิธีทำ รูปแบบของประพจน์ $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

ประกอบด้วยประพจน์ย่อยสองประพจน์ คือ p, q จึงมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 กรณี

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T

องสร้างตารางค่าความจริงของ $q \rightarrow (p \wedge \sim r)$

p	q	r	$\sim r$	$p \wedge \sim r$	$q \rightarrow (p \wedge \sim r)$
T	T	T	F	F	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

จงหาค่าความจริงของ $p \wedge q \rightarrow r$ v s



p	q	r	s	$p \wedge q$	rvs	$p \wedge q \rightarrow rvs$
T	T	T	T			
T	T	T	F			
T	T	F	T			
T	T	F	F			
T	F	T	T			
T	F	T	F			
T	F	F	T			
T	F	F	F			
F	T	T	T			
F	T	T	F			
F	T	F	T			
F	T	F	F			
F	F	T	T			
F	F	T	F			
F	F	F	T			
F	F	F	F			

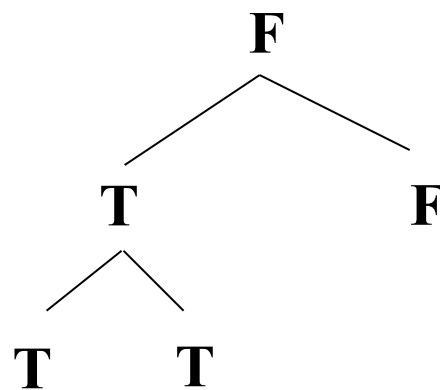
p	q	r	s	$p \wedge q$	rvs	$p \wedge q \rightarrow rvs$
T	T	T	T	T	T	
T	T	T	F	T	T	
T	T	F	T	T	T	
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	T	F	T	
T	F	T	F	F	T	
T	F	F	T	F	T	
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	T	
F	T	T	F	F	T	
F	T	F	T	F	T	
F	T	F	F	F	F	
F	F	T	T	F	T	
F	F	T	F	F	T	
F	F	F	T	F	T	
F	F	F	F	F	F	

กำหนด p q r เป็นประพจน์ และให้ประพจน์

$(p \wedge q) \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าของ p, q, r

วิธีทำ

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$



สรุป

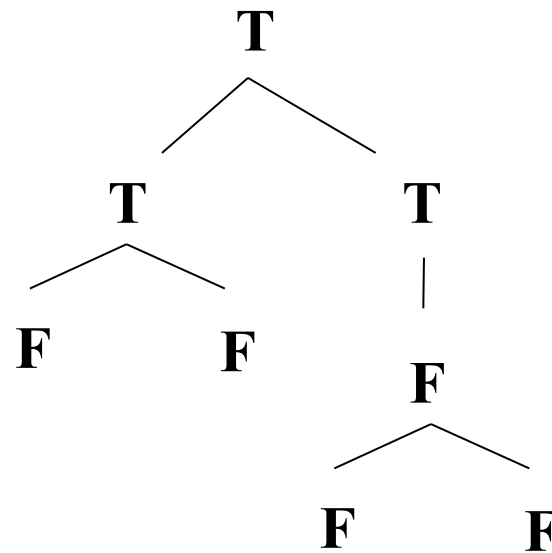
p มีค่าความจริงเป็น **T**

q มีค่าความจริงเป็น **T**

r มีค่าความจริงเป็น **F**

กำหนด $(r \rightarrow t) \wedge [\sim(s \vee t)]$ มีค่าความจริงเป็น T จงหาค่าของ r, s, t

$$(r \rightarrow t) \wedge [\sim (s \vee t)]$$



ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ ถ้า $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้ว ประพจน์ใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

ก. $\sim p \wedge q$

ข. $p \rightarrow \sim r$

ค. $p \wedge q$

ง. $q \leftrightarrow \sim r$



Thank You !



กำหนด p, q, r, s เป็นประพจน์ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ ไม่เป็น ตัจนิรันดร์

ก. $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

ข. $[p \vee (q \wedge r)] \vee \sim[p \vee (q \wedge r)]$

ค. $[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)]$

ง. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (s \vee r) \wedge \sim s] \leftrightarrow p$

ประพจน์ที่สมมูลกับประพจน์ $p \leftrightarrow q$ คือประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

ก. $(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge \sim p)$

ข. $(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$

ค. $(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow p)$

ง. $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

ประพจน์ใดต่อไปนี้เป็นสมมูลกับประพจน์ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

ก. $(p \wedge q) \vee \sim r$

ข. $(p \wedge q) \rightarrow r$

ค. $\sim(p \vee q) \vee r$

ง. $\sim(p \vee q) \rightarrow r$

ถ้า p และ q เป็นประพจน์แล้ว ประพจน์ $p \rightarrow \sim(q \rightarrow p)$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

ก. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$

ข. $\sim p \vee (p \vee q)$

ค. $p \rightarrow (\sim p \vee q)$

ง. $p \rightarrow \sim(p \wedge q)$

ประพจน์ $\sim p \rightarrow [q \rightarrow (r \vee p)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใด

ก. $\sim p \vee q \vee r$

ข. $p \vee \sim q \vee r$

ค. $p \vee q \vee \sim r$

ง. $p \vee \sim q \vee \sim r$

กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ ประพจน์ $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใด

ก. $p \wedge \sim(q \rightarrow r)$

ข. $\sim q \vee (\sim p \wedge r)$

ค. $\sim(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$

ง. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$