# ประพจน์และค่าความจริงของประพจน์

## ตรรกศาสตร์

**ตรรกศาสตร์** คือ วิชาที่กล่าวถึงหลักเกณฑ์การคิดหาเหตุผล

## ประพจน์

**ประพจน์** คือ ข้อความที่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จเพียงอย่างเดียว

**ตัวอย่างที่ 1**

1. ข้อความต่อไปนี้ เป็นประพจน์

| | |
|---|---|
| (1) แมวมีสี่ขา | (เป็นจริง) |
| (2) พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันตก | (เป็นเท็จ) |
| (3) $2 + 7 > 5$ | (เป็นจริง) |
| (4) $\varnothing \in P(\varnothing)$ | (เป็นจริง) |
| (5) $2 \div 10 \neq 10 \div 2$ | (เป็นจริง) |
| (6) $\sqrt{8}$ เป็นจำนวนตรรกยะ | (เป็นเท็จ) |
| (7) ประเทศไทยมี 10 จังหวัด | (เป็นเท็จ) |
| (8) $\{1, 3, \{1, 2, 3, \ldots\}\}$ เป็นเซตอนันต์ | (เป็นเท็จ) |

2. ข้อความต่อไปนี้ ไม่เป็นประพจน์

(1) $4 + (-10)$ มีค่าเท่าไร

(2) เขาเป็นนักคณิตศาสตร์

(3) กรุณาถอดรองเท้าก่อนเข้าห้องเรียน

(4) จงแก้สมการ $2x + 3 = 8$

(5) ว้าย ! ช่วยด้วย

(6) ช่วยเปิดประตูหน่อยคะ

(7) ทุกคน ขวาหัน

(8) ครูชอบเล่นบาสเกตบอล

**ข้อสังเกต**

(1) ประโยคคำสั่ง, คำถาม, ขอร้อง, อุทาน, วลี สุภาษิต, คำพังเพย หรือประโยคที่ไม่มีค่าความจริง **ไม่เป็นประพจน์**

(2) ประโยคที่มีตัวแปรปะปนอยู่ เมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้ว ทำให้ประโยคเป็นจริงบ้างเท็จบ้าง **ไม่เป็นประพจน์** เช่น เขาเป็นนักคณิตศาสตร์, $x + 3 < 5$

**ค่าความจริง (Truth value)**

**ค่าความจริง** คือ ความถูกต้อง, ไม่ถูกต้อง ของสิ่งที่กำลังพิจารณา ค่าความจริงมี 2 ชนิด คือ

1. ค่าความจริงที่มีค่าเป็นจริง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ T (True)
2. ค่าความจริงที่มีค่าเป็นเท็จ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ F (False)

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

| ประพจน์ | ค่าความจริง |
|---|---|
| 1. 3 เป็นจำนวนเฉพาะ | T |
| 2. $\{1, 3, 5\} - \{1, 7, 8\} = \{3, 5, 7, 8\}$ | F |
| 3. รากที่ 3 ของ -8 เท่ากับ -2 | T |
| 4. $3^{55}$ มีตัวเลขหลักหน่วยเป็น 1 | F |
| 5. 7 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + 1 = 50$ | T |

## แบบฝึกหัด เรื่อง ประพจน์และค่าความจริงของประพจน์

**1. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ แล้วทำเครื่องหมาย "✓" ลงในช่องว่าง**

| ข้อความ | เป็นประพจน์ | ไม่เป็นประพจน์ |
|---|---|---|
| 1) $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ | | |
| 2) เขาเป็นนายกรัฐมนตรีของประเทศไทย | | |
| 3) นายขาว รักคณิต สูง 175 เซนติเมตร | | |
| 4) 51 เป็นจำนวนเฉพาะ | | |
| 5) เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต | | |
| 6) 2 เป็นคำตอบของสมการ $3x + 1 = 7$ | | |
| 7) โปรดอย่าส่งเสียงดัง | | |
| 8) $2x + 6 = 10$ | | |
| 9) ประโยคทุกประโยคมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ | | |
| 10) $\{x \in I^+ \mid x^2 + 1 = 0\}$ เป็นเซตว่าง | | |
| 11) $x^2 - y = 1$ | | |
| 12) $\pi = \frac{22}{7}$ | | |

**2. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้**

………… 1) $\{0\} = \varnothing$

………… 2) 1 เป็นจำนวนเฉพาะ

………… 3) 51 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

………… 4) $\sqrt{4} = \pm 2$

………… 5) $(-4) \times (-5) = 5 \times 4$

………… 6) $x = 2$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 = 4$

………… 7) $2(1 + 2 + 3 + \ldots + 25) = 650$

………… 8) พยัญชนะในภาษาไทยมี 44 ตัว

# การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม 1 ตัวเชื่อม

## การใช้สัญลักษณ์แทนประพจน์

โดยทั่วไปนิยมใช้สัญลักษณ์ p, q, r, s, … แทนประพจน์ เช่น

ประพจน์ “$3+9 = 12$” เขียนแทนด้วย p

ประพจน์ “5.132 เป็นจำนวนตรรกยะ” เขียนแทนด้วย q

ประพจน์ “แมวเป็นสัตว์ครึ่งน้ำครึ่งบก” เขียนแทนด้วย r

## การเชื่อมประพจน์

**ตัวเชื่อม (Connective)** คือ สิ่งที่ใช้เชื่อมประพจน์สองประพจน์ ซึ่งเป็นการสร้างประพจน์ใหม่ ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์มี 5 ตัวเชื่อม ดังตารางต่อไปนี้

| ตัวเชื่อม | ชื่อภาษาอังกฤษ | สัญลักษณ์ |
|---|---|---|
| ไม่, ไม่ใช่, นิเสธ | Not | $\sim$ |
| และ, กับ, แต่ | And | $\wedge$ |
| หรือ | Or | $\vee$ |
| ถ้า ... แล้ว ...., ดังนั้น, เพราะฉะนั้น | If … then … | $\rightarrow$ |
| ... ก็ต่อเมื่อ ... | … If and only if …, iff | $\leftrightarrow$ |

**ความสำคัญของตัวเชื่อม**

**ตัวเชื่อมแต่ละตัวมีความสำคัญ (ครอบคลุม) ไม่เท่ากัน ดังนี้**

1. “$\sim$” มีความสำคัญน้อยที่สุด
2. “$\wedge, \vee$” มีความสำคัญมากกว่า “$\sim$”
3. “$\rightarrow$” มีความสำคัญมากกว่า “$\wedge, \vee$”
4. “$\leftrightarrow$” มีความสำคัญมากที่สุด

**การเปลี่ยนประพจน์ที่เป็นข้อความให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์**

ในการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมหลาย ๆ ตัวเชื่อม ต้องเปลี่ยนประพจน์ที่เป็นข้อความให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์เสียก่อน จะทำให้หาค่าความจริงได้ง่ายยิ่งขึ้น

**ตัวอย่างที่ 1** การเปลี่ยนประพจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ เมื่อกำหนด p, q, r แทนประพจน์ใด ๆ

| **ประพจน์** | **สัญลักษณ์แทนประพจน์** |
|---|---|
| 1. $2 \neq -2$ หรือ $3+4 = 10$ | $p \vee q$ |
| 2. ถ้า 8 เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\sqrt{8}$ เป็นจำนวนเต็ม | $p \rightarrow q$ |
| 3. $2^4 = 4^2$ แต่ $2 \neq 4$ | $p \wedge q$ |
| 4. $5-6 \neq 6+5$ หรือ $2 < 5$ ก็ต่อเมื่อ $5^2 = 10$ | $(p \vee q) \leftrightarrow r$ |

**ข้อสังเกต** 1. ในกรณีที่โจทย์ไม่ใส่วงเล็บแยกประพจน์มาให้ เมื่อจะใส่วงเล็บต้องใส่วงเล็บคลุมตัวเชื่อมที่มีความสำคัญน้อยก่อน ตัวเชื่อมที่มีความสำคัญมากกว่า

2. ประพจน์ที่นำมาเชื่อมด้วยตัวเชื่อมต่าง ๆ เรียกว่า ประพจน์ย่อย (atomic statement)

## ค่าความจริงของประพจน์

ค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากตัวเชื่อมด้วยตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ มีค่าความจริงดังนี้

### 1. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "และ" (conjunction)

ถ้า p, q เป็นประพจน์ ประพจน์ใหม่ที่เกิดจากการเชื่อมด้วยตัวเชื่อม "และ" คือ $p \wedge q$ มีค่าความจริง ดังตาราง

| **p** | **q** | **$p \wedge q$** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

**สรุป** 1. $p \wedge q$ **เป็นจริง** เพียงกรณีเดียวเท่านั้น ก็คือ **$T \wedge T$** เป็น **T** กรณีอื่น ๆ เป็นเท็จหมด

2. ถ้าประพจน์ใดประพจน์หนึ่งเป็น F จะได้ประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม "และ" เป็น F คือ **$p \wedge F$** เป็น **F**

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

| **ประพจน์** | **ค่าความจริง** |
|---|---|
| 1. 3 = 6 และ 3 เป็นจำนวนคู่ | F |
| 2. 2 น้อยกว่า 5 แต่ 3 ไม่น้อยกว่า -5 | T |
| 3. 4 กับ $1 \in \{1, 2\}$ | F |
| 4. 2 และ 5 เป็นตัวประกอบของ 30 | T |

**2. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "หรือ" (disjunction)**

ถ้า p, q เป็นประพจน์ ประพจน์ใหม่ที่เกิดจากการเชื่อม ด้วยตัวเชื่อม "หรือ" คือ $p \vee q$ มีค่าความจริงดังตารางนี้

| **p** | **q** | **$p \vee q$** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**สรุป** 1. $p \wedge q$ **เป็นเท็จ** เพียงกรณีเดียวเท่านั้น ก็คือ **$F \vee F$** เป็น **F** กรณีอื่น ๆ เป็นจริงหมด

2. ถ้าประพจน์ใดประพจน์หนึ่งเป็น T จะได้ประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม "หรือ" เป็น T คือ **$p \vee T$** เป็น **T**

**ตัวอย่างที่ 3** จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

| **ประพจน์** | **ค่าความจริง** |
|---|---|
| 1. -2 หรือ 3 เป็นจำนวนเฉพาะ | T |
| 2. $3^4 = 4^3$ หรือ 3 = 4 | F |
| 3. $\pi = \frac{22}{7}$ หรือ $\pi$ เป็นจำนวนอตรรกยะ | T |
| 4. $\varnothing \subset \varnothing$ หรือไม่ก็ $\{0\} = \varnothing$ | T |

**3. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "ถ้า...แล้ว..." (conditional)**

ถ้า p, q เป็นประพจน์ ประพจน์ใหม่ที่เกิดจากการเชื่อม ด้วยตัวเชื่อม "ถ้า...แล้ว..." คือ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงดังตารางนี้

| **p** | **q** | **$p \rightarrow q$** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

**สรุป** 1. $p \rightarrow q$ เป็น**เท็จ**เพียงกรณีเดียวเท่านั้น คือ **$T \rightarrow F$** เป็น **F** กรณีอื่น ๆ เป็นจริงหมด

2. ถ้าประพจน์ตัวหน้าเป็น F จะได้ตัวเชื่อม "ถ้า...แล้ว..." เป็น T คือ **$F \rightarrow q$** เป็น **T**

3. ถ้าประพจน์ตัวหลังเป็น T จะได้ตัวเชื่อม "ถ้า...แล้ว..." เป็น T คือ **$p \rightarrow T$** เป็น **T**

**ตัวอย่างที่ 3** จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

| **ประพจน์** | **ค่าความจริง** |
|---|---|
| 1. ถ้า $2 = 3$ แล้ว $3^2 = 9$ | T |
| 2. ถ้า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $(\sqrt{3})^2 \neq 3$ | F |
| 3. $\lvert 3-2 \rvert = \lvert 1-3 \rvert$ ดังนั้น $3-2 \neq 1-3$ | T |
| 4. เมื่อ $2 < 4$ จะได้ $2+5 < 4+5$ | T |

**4. การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "ก็ต่อเมื่อ" (biconditional)**

ถ้า p, q เป็นประพจน์ ประพจน์ใหม่ที่เกิดจากการเชื่อม ด้วยตัวเชื่อม "ก็ต่อเมื่อ" คือ $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงดังตารางนี้

| **p** | **q** | **$p \leftrightarrow q$** |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

**สรุป** $p \leftrightarrow q$ เป็น**จริง** เมื่อประพจน์ตัวหน้ากับตัวหลังมีค่าความจริงเหมือนกัน คือ

**$T \leftrightarrow T$** เป็น **T**

**$F \leftrightarrow F$** เป็น **T**

**ตัวอย่างที่ 5** จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

| **ประพจน์** | **ค่าความจริง** |
|---|---|
| 1. 3 ไม่น้อยกว่า 4 ก็ต่อเมื่อ 0 ไม่น้อยกว่า -3 | F |
| 2. $2 < 3$ ก็ต่อเมื่อ $3 < 2$ | F |
| 3. $7 + 5$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ 7 เป็นจำนวนคี่ | T |
| 4. $5 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ก็ต่อเมื่อ $\{5\} \subset \{1, 2, 3\}$ | T |

**นิเสธ (Negation) ของประพจน์**

**นิเสธของประพจน์ p** คือ ประพจน์ที่มีใจความเดิม แต่มี่ค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์เดิม กล่าวคือ ต้องคงประธาน กิริยา และกรรม ของประพจน์เดิมไว้ เขียนแทนนิเสธของประพจน์ p ด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$ พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 6** จงพิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

ประพจน์ p แทน “นายแดงไปโรงเรียน”

นิเสธของประพจน์ p คือ $\sim p$

ประพจน์ $\sim p$ แทน “นายแดงไม่ไปโรงเรียน”

ประพจน์ q แทน “3 น้อยกว่า 5”

นิเสธของประพจน์ q คือ $\sim q$

ประพจน์ $\sim q$ แทน “3 ไม่น้อยกว่า 5” หรือ “3 มากกว่าหรือเท่ากับ 5”

ประพจน์ r แทน “ธีรเดชเป็นผู้ชาย”

นิเสธของประพจน์ r คือ $\sim r$

ประพจน์ $\sim r$ แทน “ธีรเดชไม่เป็นผู้ชาย”

ถ้า p แทนประพจน์ นิเสธของประพจน์ p คือ $\sim p$ มีค่าความจริงดังตาราง

| **p** | **$\sim$p** |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

**แบบฝึกหัด เรื่อง การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม 1 ตัวเชื่อม**

**1. จงเขียนประโยคต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์**

1) 2(4 - 8) = 16 หรือ 3(1 - 5) = 12 ……………………………………………………..

2) 5 เป็นจำนวนคี่ แต่ 8 เป็นจำนวนคู่ ……………………………………………………..

3) ถ้าสุนัขมีสี่ขา แล้วนกมีปีก ……………………………………………………..

4) $x^2 = 9$ ก็ต่อเมื่อ $x = 3$ และ $x = -3$ ……………………………………………………..

**2. จงหาค่าความจริงของประพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้**

…………….. 1) $7 + 3 < 10$ แต่ $10 > -15$

…………….. 2) ถ้า $13 > 4$ แล้ว $3 - 4 < 4 - 3$

…………….. 3) 24 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ 2 หาร 24 ลงตัว

…………….. 4) 7 ไม่ใช่จำนวนนับ หรือ 23 เป็นจำนวนเฉพาะ

…………….. 5) $|2 - 12| = |12 - 2|$ ก็ต่อเมื่อ $2 < 12$

…………….. 6) ถ้า $\{0\} = \varnothing$ แล้ว $\varnothing$ เป็นสับเซตของทุก ๆ เซต

**3. ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ**

1) ถ้า $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ p มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของ q

2) ถ้า $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ p มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ q

3) ถ้า $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ p

4) ถ้า $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ p มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ q

5) ถ้า $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ p

6) ถ้า $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ r มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของ $q \leftrightarrow r$

7) ถ้า $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\sim r$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของ $r \rightarrow q$

8) ถ้า $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\sim q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $\sim p \rightarrow r$

9) ถ้า $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $r \wedge p$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $\sim r$

10) ถ้า $p \wedge (\sim q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $p \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของ $q \leftrightarrow r$

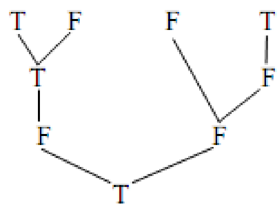
## การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมมากกว่า 1 ตัวเชื่อม

การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมหลาย ๆ ตัวเชื่อม จะต้องรู้ค่าความจริงของประพจน์ย่อย ๆ แล้วหาค่าความจริงของประพจน์ผสม โดยหาค่าความจริงที่อยู่ในวงเล็บก่อน จากนั้นหาค่าความจริงตามลำดับความสำคัญของตัวเชื่อม คือ “$\sim$”, “$\wedge$”, “$\vee$”, “$\rightarrow$”, “$\leftrightarrow$”

**ตัวอย่างที่ 1** กำหนดให้ p, q เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง r, s เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

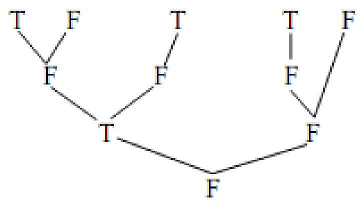
(1) $\sim(p \vee s) \rightarrow (r \leftrightarrow \sim p)$

**วิธีทำ** $\sim(p \vee s) \rightarrow (r \leftrightarrow \sim p)$




(2) $[(p \leftrightarrow r) \wedge \sim q] \rightarrow (\sim p \vee \sim s)$

**วิธีทำ** $[(p \wedge r) \leftrightarrow \sim q] \rightarrow (\sim p \vee s)$




**ตัวอย่างที่ 2** ถ้า $1+3<5$ และ $5>9$ ดังนั้น $2^0=1$ หรือ $1^{-5}=1$

**วิธีทำ** หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย

ให้ p แทนประพจน์ “$1+3<5$ ” มีค่าความจริงเป็น T

ให้ q แทนประพจน์ “$5>9$ ” มีค่าความจริงเป็น F

ให้ r แทนประพจน์ “$2^0=1$ ” มีค่าความจริงเป็น T

ให้ s แทนประพจน์ “$1^{-5}=1$” มีค่าความจริงเป็น T

เปลี่ยนโจทย์ให้เป็นสัญลักษณ์ จะได้ $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็น T

**ตัวอย่างที่ 3** ถ้า $1+3<5$ แล้ว $5>9$ ก็ต่อเมื่อ $2^0=1$ และ $1^{-5}=1$

**วิธีทำ** หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย

ให้ p แทนประพจน์ “$1+3<5$ ” มีค่าความจริงเป็น T

ให้ q แทนประพจน์ “$5>9$ ” มีค่าความจริงเป็น F

ให้ r แทนประพจน์ “$2^0=1$ ” มีค่าความจริงเป็น T

ให้ s แทนประพจน์ “$1^{-5}=1$” มีค่าความจริงเป็น T

เปลี่ยนโจทย์ให้เป็นสัญลักษณ์ จะได้ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ มีค่าความจริงเป็น F

## แบบฝึกหัด เรื่อง การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมมากกว่า 1 ตัวเชื่อม

1. ให้ p แทน 39 เป็นจำนวนเฉพาะ

   q แทน $|-5| = 5$

   r แทน $\varnothing$ เป็นสับเซตแท้ของ $\varnothing$

   จงเปลี่ยนประโยคคำพูดต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

   1) ถ้า $|-5| \neq 5$ และ 39 เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\varnothing$ เป็นสับเซตแท้ของ $\varnothing$

   ..............................................................................................................................

   2) $\varnothing$ เป็นสับเซตแท้ของ $\varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $|-5| = 5$ และ 39 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

   ..............................................................................................................................

   3) ถ้า $|-5| \neq 5$ หรือ 39 เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\varnothing$ ไม่เป็นสับเซตแท้ของ $\varnothing$

   ..............................................................................................................................

2. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง เท็จ จริง เท็จ ตามลำดับ แล้ว จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   1) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (r \vee s)$ ........................................

   2) $[(p \vee q) \wedge \sim r] \rightarrow q$ ........................................

   3) $q \leftrightarrow [(p \wedge s) \vee r]$ ........................................

   4) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim s \vee \sim q)$ ........................................

   5) $[(p \rightarrow q) \wedge r] \leftrightarrow (r \vee \sim s)$ ........................................

3. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์โดยที่ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ $r \wedge (\sim s)$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   1) $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge \sim p)$ ........................................

   2) $[(p \wedge s) \vee \sim r] \rightarrow (r \wedge q)$ ........................................

   3) $(p \leftrightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$ ........................................

   4) $[(p \rightarrow s) \wedge q] \leftrightarrow (r \vee s)$ ........................................

   5) $[(r \wedge q) \vee (s \rightarrow p)] \leftrightarrow [p \wedge (s \vee q)]$ ........................................

4. ให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์โดยที่ $[\sim(p \wedge q)] \vee (r \rightarrow s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ p, q, r และ s ............................................................

5. ให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์โดยที่ $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $(s \wedge r) \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ p, q, r และ s ................................................

## ตารางค่าความจริงของประพจน์ (Truth table)

การหาค่าความจริงของประพจน์ โดยที่โจทย์ไม่ได้บอกค่าความจริงของประพจน์ย่อย ๆ มาให้ เราต้องพิจารณาค่าความจริงที่อาจจะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดจากประพจน์ย่อย ๆ เหล่านั้น วิธีที่นิยมใช้คือการสร้างตารางค่าความจริง

ตารางที่แสดงค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมด ค่าความจริงในตารางจะมีกี่กรณีนั้นขึ้นอยู่กับจำนวนของประพจน์ย่อย ๆ ดังนี้

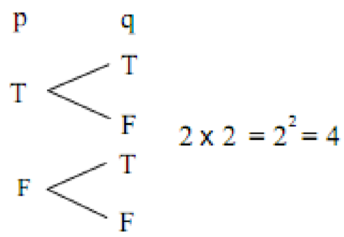
1. ถ้ามีประพจน์ย่อย 1 ประพจน์ จะได้ค่าความจริงที่อาจจะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 2 กรณี คือ

| **p** |
|---|
| **T** |
| **F** |

2. ถ้ามีประพจน์ย่อย 2 ประพจน์ จะได้ค่าความจริงที่อาจจะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 กรณี คือ

จากแผนภาพต้นไม้ (tree diagram)

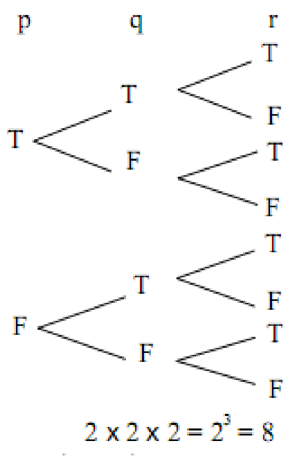
| **p** | **q** |
|---|---|
| T | T |
| T | F |
| F | T |
| F | F |




3. ถ้ามีประพจน์ย่อย 3 ประพจน์ จะได้ค่าความจริงที่อาจจะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 8 กรณี คือ

จากแผนภาพต้นไม้ (tree diagram)

| p | q | r |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | T | F |
| T | F | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | T | F |
| F | F | T |
| F | F | F |



ฉะนั้น ถ้ามีประพจน์ย่อย n ประพจน์ จะได้ค่าความจริงที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด $2^n$ กรณี การสร้างตารางค่าความจริง เป็นการหาค่าความจริงของประพจน์ทุก ๆ กรณีที่เป็นไปได้

**ตัวอย่างที่ 1** จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

(1) $p \rightarrow (q \vee \sim p)$

**วิธีทำ** ประพจน์ $p \rightarrow (q \vee \sim p)$ มีประพจน์ย่อย 2 ประพจน์ ค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมด 4 กรณี สามารถสร้างตารางดังนี้

| **p** | **q** | **$\sim p$** | **$q \vee \sim p$** | **$p \rightarrow (q \vee \sim p)$** |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T |

(2) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim(r \wedge q)$

**วิธีทำ** ประพจน์ $(p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim(r \wedge q)$ มีประพจน์ย่อย 3 ประพจน์ ค่าความจริงที่เป็นไปได้ ทั้งหมด 8 กรณี สามารถสร้างตารางดังนี้

| **p** | **q** | **r** | **$\sim q$** | **$p \vee \sim q$** | **$r \wedge q$** | **$\sim(r \wedge q)$** | **$(p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim(r \wedge q)$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | T | F | F |
| T | T | F | F | T | F | T | T |
| T | F | T | T | T | F | T | T |
| T | F | F | T | T | F | T | T |
| F | T | T | F | F | T | F | T |
| F | T | F | F | F | F | T | F |
| F | F | T | T | T | F | T | T |
| F | F | F | T | T | F | T | T |

## แบบฝึกหัด เรื่อง ตารางค่าความจริงของประพจน์ (Truth table)

**จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้**

(1) $\sim(p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$

**วิธีทำ** สร้างกรณีที่เป็นไปได้ 4 กรณี ดังนี้

| **p** | **q** | **$p \vee q$** | **$\sim(p \vee q)$** | **$q \wedge p$** | **$\sim(p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$** |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | | | |
| T | F | | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |

(2) $(q \rightarrow r) \leftrightarrow [(r \vee \sim q) \rightarrow \sim r]$

**วิธีทำ** สร้างกรณีที่เป็นไปได้ 4 กรณี ดังนี้

| **q** | **r** | |
|---|---|---|
| T | T | |
| T | F | |
| F | T | |
| F | F | |

(3) $[(p \wedge q) \leftrightarrow r] \vee [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

**วิธีทำ** สร้างกรณีที่เป็นไปได้ 8 กรณี ดังนี้

| **p** | **q** | **r** | |
|---|---|---|---|
| T | T | T | |
| T | T | F | |
| T | F | T | |
| T | F | F | |
| F | T | T | |
| F | T | F | |
| F | F | T | |
| F | F | F | |

(4) $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow [q \leftrightarrow \sim p]$

| **p** | **q** | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(5) $[(\sim p) \vee (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$

| **p** | **q** | **r** | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

(6) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

| **p** | **q** | **r** | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

## การสมมูลของประพจน์

**รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน**

ประพจน์สองประพจน์สมมูลกัน เมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี ใช้สัญลักษณ์ “ $\equiv$ ” แทนสมมูล

**วิธีการตรวจสอบการสมมูลกันของประพจน์**

วิธีการตรวจสอบการสมมูลกันของประพจน์สองประพจน์ทำได้โดยสร้างตารางค่าความจริง

**ตัวอย่าง** จงตรวจสอบว่าประพจน์ $\sim p \rightarrow q$ สมมูลกับประพจน์ $p \vee q$ หรือไม่

**วิธีทำ** สร้างตารางค่าความจริง ได้ 4 กรณี

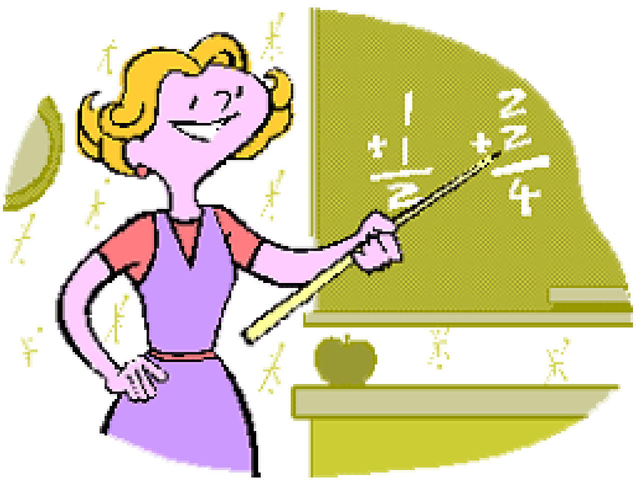
| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim p \rightarrow q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | T | T |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | F | F |

จากตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim p \rightarrow q$ กับประพจน์ $p \vee q$ พบว่ามีค่าความจริงกรณีต่อกรณีเหมือนกันทุกกรณี ดังนั้นประพจน์ $\sim p \rightarrow q$ สมมูลกับประพจน์ $p \vee q$

**หมายเหตุ** การตรวจสอบการสมมูลกันของประพจน์ที่อยู่ในรูปข้อความ ให้เปลี่ยนประพจน์ที่อยู่ในรูปข้อความให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ แล้วตรวจสอบการสมมูลกันของสัญลักษณ์นั้น ๆ

# รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

1. $\sim(\sim p) \equiv p$
2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. $p \vee q \equiv q \vee p$
4. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
5. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
6. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
7. $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
8. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
9. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
10. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
11. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
12. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
13. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
14. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
15. $\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$
16. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$
17. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$



## แบบฝึกหัด เรื่อง การสมมูลของประพจน์

1. จงสร้างตารางค่าความจริงเพื่อตรวจสอบว่าประพจน์ที่กำหนดให้สมมูลกันหรือไม่

   1) $\sim p \vee \sim q$ กับ $\sim p \rightarrow q$

   2) $p \rightarrow (q \vee r)$ กับ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

2. จงตรวจสอบว่าประพจน์ที่กำหนดให้สมมูลกันหรือไม่ เมื่อกำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใด ๆ

   1) $(p \wedge q) \rightarrow r$ กับ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

   2) $[(p \wedge \sim p) \vee r] \rightarrow [(q \vee \sim q) \wedge p]$ กับ $p \rightarrow q$

3) $(\sim p) \rightarrow [q \rightarrow (p \vee r)]$ กับ $p \vee q \vee (\sim r)$

4) $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$ กับ $p \wedge [\sim(q \rightarrow r)]$

5) $[p \wedge (r \vee \sim r)] \rightarrow [(q \wedge r) \vee (s \wedge \sim s)]$ กับ $(q \rightarrow r) \rightarrow \sim p$

3. ให้ประพจน์ p แทน 5 เป็นจำนวนนับ

q แทน $\{0\} = \varnothing$

r แทน $\pi$ เป็นจำนวนจริง

จงหาข้อความที่มีความหมายเหมือนกับข้อความของประพจน์

$[(q \vee r) \rightarrow r] \rightarrow \sim[(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q]$

## นิเสธของประพจน์

**รูปแบบของประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน**

ประพจน์สองประพจน์จะเป็นนิเสธกัน เมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกันข้ามกันทุกกรณี ใช้สัญลักษณ์ “ $\sim$ ” แทนนิเสธ

**ตัวอย่างที่ 1** จงตรวจสอบว่าประพจน์ $\sim p \rightarrow q$ เป็นนิเสธกับประพจน์ $\sim p \wedge \sim q$ หรือไม่

**วิธีทำ** สร้างตารางค่าความจริง ได้ 4 กรณี

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \rightarrow q$ | $\sim p \wedge \sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | F |
| T | F | F | T | T | F |
| F | T | T | F | T | F |
| F | F | T | T | F | T |

จากตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim p \rightarrow q$ กับประพจน์ $\sim p \wedge \sim q$ พบว่ามีค่าความจริงกรณีต่อกรณีตรงกันข้ามทุกกรณี ดังนั้นประพจน์ $\sim p \rightarrow q$ เป็นนิเสธกับประพจน์ $\sim p \wedge \sim q$

**ตัวอย่างที่ 2** จงหานิเสธของข้อความ “ ถ้า $2+4=6$ แล้ว $2 \times 3 = 6$ ”

**วิธีทำ** ให้ $p$ แทนข้อความ $2+4=6$

$q$ แทนข้อความ $2 \times 3 = 6$

ข้อความ “ ถ้า $2+4=6$ แล้ว $2 \times 3 = 6$ ” เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ $p \rightarrow q$

เนื่องจากนิเสธของ $p \rightarrow q$ คือ $\sim(p \rightarrow q)$

เพราะว่า $\sim(p \rightarrow q)$ สมมูลกับ $p \wedge \sim q$

ดังนั้น นิเสธของ $p \rightarrow q$ คือ $p \wedge \sim q$

$p \wedge \sim q$ เขียนเป็นข้อความ “$2+4=6$ และ $2 \times 3 \neq 6$ ”

# แบบฝึกหัด เรื่อง นิเสธของประพจน์

1. จงหานิเสธของข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1) $3 < 5$ หรือ 7 เป็นจำนวนตรรกยะ

   ..............................................................................................................................

   2) $4 \notin \{1, 2, 3\}$ และ $\{4\} \not\subset \{1, 2, 3\}$

   ..............................................................................................................................

   3) ถ้า $x < 10$ และ $x > 7$ แล้ว $x + 5 = 12$

   ..............................................................................................................................

   4) ถ้า $a^2 < b^2$ แล้ว $a = b$ หรือ $a < b$

   ..............................................................................................................................

   5) $p \leftrightarrow q$

   ..............................................................................................................................

   6) $p \wedge (\sim q \vee r)$

   ..............................................................................................................................

   7) $(p \wedge q) \rightarrow r$

   ..............................................................................................................................

   8) $\sim(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

   ..............................................................................................................................

   9) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

   ..............................................................................................................................

   10) $[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$

   ..............................................................................................................................

2. ให้ประพจน์ p แทน $2 + 5 \leq 7$

   q แทน $\{\varnothing\} = \varnothing$

   r แทน 51 เป็นจำนวนเฉพาะ

   จงหาข้อความที่มีความหมายตรงกันข้ามกับข้อความของประพจน์

   $[(q \vee r) \rightarrow r] \rightarrow \sim[(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q]$

## สัจนิรันดร์

**สัจนิรันดร์** คือ รูปแบบของประพจน์ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

**วิธีการตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์**

1. สร้างตารางค่าความจริง
2. การสมมติข้อขัดแย้ง

**ตัวอย่างที่ 1** ประพจน์ $[(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

**วิธีทำ** ตรวจสอบโดยสร้างตารางค่าความจริง

| p | q | r | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow r$ | $[(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r)]$ | $p \rightarrow r$ | $[(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F | F | T |
| T | F | T | F | T | F | T | T |
| T | F | F | F | T | F | F | T |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | F | F | T | T |
| F | F | T | T | T | T | T | T |
| F | F | F | T | T | T | T | T |

จากตารางพบว่า ค่าความจริงขั้นสุดท้ายของประพจน์เป็นจริงทุกกรณี
ดังนั้น $[(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นสัจนิรันดร์

**วิธีที่ (2)** ตรวจสอบโดยการสมมติข้อขัดแย้ง

วิธีนี้ใช้ตรวจสอบว่าประพจน์นั้น ๆ มีโอกาสเกิดเท็จได้หรือไม่ ถ้าเกิดเท็จได้ก็แสดงว่าประพจน์นั้นไม่เป็นสัจนิรันดร์

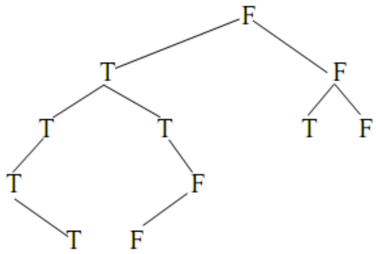
โดยสมมติให้ประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็น F จากนั้นวิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย ๆ เพื่อดูว่าค่าความจริงของประพจน์ขัดแย้งกันหรือไม่

ถ้า**ขัดแย้ง**กันแสดงว่า ไม่มีทางเกิดเท็จได้ ประพจน์นั้นก็เป็น**สัจนิรันดร์**

ถ้า**ไม่ขัดแย้ง**กันแสดงว่า มีทางเกิดเท็จได้ ประพจน์นั้นก็**ไม่เป็นสัจนิรันดร์**

จากประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ สมมติให้ประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็น F แล้ววิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย ๆ เพื่อดูว่าค่าความจริงของประพจน์ขัดแย้งกันหรือไม่

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

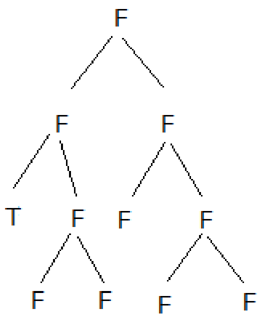



พบว่า ค่าความจริงของประพจน์ q เป็นทั้ง T กับ F แสดงว่าขัดแย้งกันจึงไม่มีทางเกิดเท็จได้ ดังนั้น ประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นสัจนิรันดร์

**ตัวอย่างที่ 2** ประพจน์ $[p \wedge (q \vee r)] \vee [(\sim p) \vee (q \vee r)]$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

**วิธีทำ** ตรวจสอบโดยการสมมติข้อขัดแย้ง

$$[p \wedge (q \vee r)] \vee [(\sim p) \vee (q \vee r)]$$




พบว่า ไม่พบข้อขัดแย้งของประพจน์ แสดงว่า มีโอกาสเกิดเท็จได้

ดังนั้น ประพจน์ $[p \wedge (q \vee r)] \vee [(\sim p) \vee (q \vee r)]$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

## แบบฝึกหัด เรื่อง สัจนิรันดร์

1. จงสร้างตารางค่าความจริงเพื่อตรวจสอบว่าประพจน์ที่กำหนดให้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

   1) $(p \vee \sim p) \vee q$

   2) $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

   3) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

   4) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$

2. จงตรวจสอบโดยใช้วิธีหาข้อขัดแย้งว่าประพจน์ในแต่ละข้อที่กำหนดให้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \rightarrow q)$

2) $[p \wedge (\sim p \vee q)] \rightarrow q$

3) $[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$

4) $(p \rightarrow q) \rightarrow [\sim(q \vee r) \rightarrow \sim(p \vee r)]$

## การอ้างเหตุผล

**การอ้างเหตุผล** คือ การสรุปผลจากข้อความที่โจทย์กำหนดมาให้

**การอ้างเหตุผลประกอบด้วยข้อความ 2 ตอน** คือ

**ข้อความตอนนำ** เรียกว่า **เหตุ** หรือ **สิ่งที่กำหนดให้** ในที่นี้แทนด้วยสัญลักษณ์ $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$

**ข้อความตอนตาม** เรียกว่า **ผล** หรือ **ข้อสรุป** ในที่นี้แทนด้วยสัญลักษณ์ C

**การสรุปผลจากข้อความที่โจทย์กำหนดให้มี 2 แบบ** คือ

**แบบที่ 1** ถ้าผลสรุปนั้นสอดคล้องกับเหตุที่กำหนดให้ เรียกการอ้างเหตุผลว่า **สมเหตุสมผล (Valid)**

**แบบที่ 2** ถ้าผลสรุปนั้นไม่สอดคล้องกับเหตุที่กำหนดให้ เรียกการอ้างเหตุผลว่า **ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)**

**สมเหตุสมผล เป็นการยอมรับว่าเหตุเป็นจริง แล้วผลสรุปต้องเป็นจริง**

**การพิจารณาว่าเหตุกับผลที่กำหนด "สมเหตุสมผลหรือไม่" มีเทคนิคในการทำดังนี้เทคนิคที่ 1 ใช้สัจนิรันดร์**

ให้ตรวจสอบประพจน์ที่เป็นเหตุ – ผล ซึ่งอยู่ในรูปสัญลักษณ์ $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

**ถ้าเป็นสัจนิรันดร์ การอ้างเหตุผลนั้น สมเหตุสมผล**

ขั้นตอนการพิจารณาว่าการอ้างเหตุผล สมเหตุสมผลหรือไม่ ตรวจสอบได้ดังนี้

**1. นำเหตุที่กำหนดให้มาทั้งหมดเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม "และ" ดังนี้**

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n$$

**2. นำเหตุทั้งหมดในข้อที่ 1 เชื่อมกับผลด้วยตัวเชื่อม "ถ้า... แล้ว..." ดังนี้**

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$$

**3. พิจารณารูปแบบ** $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ **เป็นสัจนิรันดร์** หรือไม่

**ถ้าเป็นสัจนิรันดร์** กล่าวว่า การอ้างเหตุผลนี้ **สมเหตุสมผล**

**ถ้าไม่เป็นสัจนิรันดร์** กล่าวว่า การอ้างเหตุผลนี้ **ไม่สมเหตุสมผล**

**เทคนิคที่ 1** นำเหตุและผลที่โจทย์กำหนดมาสร้างตามรูปแบบ แล้วตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์

โดยการ 1) การสร้างตารางค่าความจริง และ 2) ใช้วิธีข้อขัดแย้ง (สมมติว่าเป็นเท็จได้)

**ตัวอย่างที่ 1** การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

**เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. $\sim q$

**ผล** $\sim p$

**วิธีทำ** **ใช้เทคนิคที่ 1** นำเหตุและผลที่โจทย์กำหนดมาสร้างตามรูปแบบ จะได้ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ ตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์ โดยสร้างตารางค่าความจริงดังนี้

| **p** | **q** | **~p** | **~q** | **p → q** | **(p → q) ∧ ~q** | **[(p → q) ∧ ~q] → ~p** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | F | T |
| T | F | F | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | F | T |
| F | F | T | T | T | T | T |

พบว่า ประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้น เหตุและผลที่โจทย์กำหนดสมเหตุสมผล

**ตัวอย่างที่ 2** การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

**เหตุ** 1. ถ้านารีขยัน แล้วนารีสอบได้ที่ 1

2. นารีสอบได้ที่ 1

**ผล** นารีขยัน

**วิธีทำ** เขียนเหตุและผลที่เป็นประโยคสัญลักษณ์

p แทน นารีขยัน

q แทน นารีสอบได้ที่ 1

จะได้ **เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. $q$

**ผล** $p$

นำเหตุและผลที่โจทย์กำหนดมาสร้างตามรูปแบบ จะได้ $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ ตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์โดยสร้างตารางค่าความจริง ดังนี้

| **p** | **q** | **p → q** | **(p → q) ∧ q** | **[(p→q) ∧ q] → p** |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | T | T | F |
| F | F | T | F | T |

พบว่าประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้น เหตุและผลที่โจทย์กำหนด ไม่สมเหตุสมผล

**ตัวอย่างที่ 3** การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

**เหตุ** 1. ถ้าล้างมือไม่สะอาด แล้วภูมิต้านทานจะต่ำ

2. ถ้าภูมิต้านทานต่ำจะทำให้ติดโรคระบาด

3. ล้างมือไม่สะอาดหรือสุขอนามัยดี

4. สุขอนามัยไม่ดี

**ผล** ติดโรคระบาด

จงตรวจสอบว่า การอ้างเหตุผลดังกล่าวสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้วิธีข้อขัดแย้ง

**วิธีทำ** กำหนดให้ p แทนประพจน์ ล้างมือไม่สะอาด

q แทนประพจน์ ภูมิต้านทานต่ำ

r แทนประพจน์ ติดโรคระบาด

s แทนประพจน์ สุขอนามัยดี

เขียนการอ้างเหตุผลใหม่ดังนี้

**เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. $q \rightarrow r$

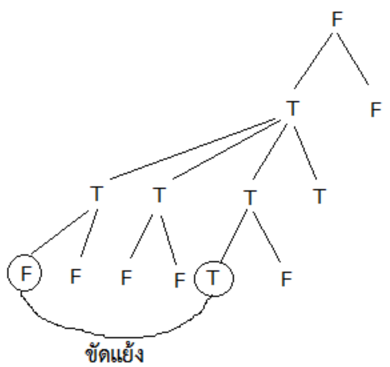
3. $p \vee s$

4. $\sim s$

**ผล** r

ตรวจสอบความเป็นสัจนิรันดร์ของประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee s) \wedge \sim s] \rightarrow r$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee s) \wedge \sim s] \rightarrow r$$




พบว่า ประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee s) \wedge \sim s] \rightarrow r$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

**เทคนิคที่ 2** ใช้กฎของการอ้างเหตุผล โดยนำเหตุที่กำหนดที่สอดคล้องกับกฎ สรุปไปสู่ผล ซึ่งกฎทุกข้อเป็นสัจนิรันดร์

**ถ้าเหตุกับผลที่กำหนดสอดคล้องกับกฎ การอ้างเหตุผลนั้น สมเหตุสมผล**

**กฎของการอ้างเหตุผล**

| **ข้อ** | **ชื่อกฎ** | **รูปแบบ** | **ข้อ** | **ชื่อกฎ** | **รูปแบบ** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | เหตุจริง – ผลจริง<br>(modus ponens) | เหตุ 1. $p \rightarrow q$<br>2. $p$<br>ผล $q$ | 5 | การลด<br>(simplification) | เหตุ 1. $p \wedge q$<br>ผล $p$<br>หรือ ผล $q$ |
| 2 | ผลเท็จ – เหตุเท็จ<br>(modus tollens) | เหตุ 1. $p \rightarrow q$<br>2. $\sim q$<br>ผล $\sim p$ | 6 | การเพิ่ม<br>(addition) | เหตุ 1. $p$<br>ผล $p \vee q$ |
| 3 | การถ่ายทอด<br>(hypothetical) | เหตุ 1. $p \rightarrow q$<br>2. $q \rightarrow r$<br>ผล $p \rightarrow r$ | 7 | Constructive | เหตุ 1. $p \rightarrow r$<br>2. $q \rightarrow s$<br>3. $p \vee q$<br>ผล $r \vee s$ |
| 4 | การตัดออก<br>(disjunctive) | เหตุ 1. $p \vee q$<br>2. $\sim p$<br>ผล $q$ | 8 | Destructive | เหตุ 1. $p \rightarrow r$<br>2. $q \rightarrow s$<br>3. $\sim r \vee \sim s$<br>ผล $\sim p \vee \sim q$ |

**ตัวอย่างที่ 4** การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

**เหตุ** 1. ถ้า $|a| = 5$ แล้ว $a = 5$

2. ถ้า $|a| \neq 5$ แล้ว $|a| > 0$

3. $a \neq 5$

**ผล** $|a| > 0$

**วิธีทำ** เขียนเหตุและผลเป็นประโยคสัญลักษณ์

$p$ แทน $|a| = 5$

$q$ แทน $a = 5$

$r$ แทน $|a| > 0$

จะได้ **เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. $\sim p \rightarrow r$

3. $\sim q$

**ผล** $r$

นำเหตุและผลที่โจทย์กำหนดมาสร้างตามรูปแบบ จะได้

$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \wedge \sim q] \rightarrow r$

ตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์ โดยใช้กฎของการอ้างเหตุผล

| | |
|---|---|
| 1) $p \rightarrow q$ | เหตุข้อที่ 1 |
| 2) $\sim q$ | เหตุข้อที่ 2 |
| 3) $\sim p$ | จาก (1) และ (2) จากกฎผลเท็จ – เหตุเท็จ |
| 4) $\sim p \rightarrow r$ | เหตุข้อที่ 3 |
| 5) $r$ | จาก (3) และ (4) จากกฎเหตุจริง – ผลจริง |

พบว่าประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \wedge \sim q] \rightarrow r$

เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้น เหตุและผลที่โจทย์กำหนด สมเหตุสมผล

**ตัวอย่างที่ 5** การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

**เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. $q \rightarrow r$

3. $\sim r$

**ผล** $\sim p$

ตรวจสอบโดยใช้กฎของการอ้างเหตุผล

**วิธีทำ**

1) $p \rightarrow q$ เหตุข้อที่ 1

2) $q \rightarrow r$ เหตุข้อที่ 2

3) $p \rightarrow r$ จาก (1) และ (2) จากกฎการถ่ายทอด

4) $\sim r$ เหตุข้อที่ 3

5) $\sim p$ จาก (3) และ (4) จากกฎผลเท็จ – เหตุเท็จ

ดังนั้น $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim r] \rightarrow \sim p$ สมเหตุสมผล

**ตัวอย่างที่ 6** การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

**เหตุ** 1. ถ้า x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคี่ แล้ว xy เป็นจำนวนคู่

2. xy ไม่เป็นจำนวนคู่

3. x ไม่เป็นจำนวนคี่

**ผล** y เป็นจำนวนคู่

**วิธีทำ** ให้ประพจน์ p แทนข้อความ x เป็นจำนวนคู่

q แทนข้อความ y เป็นจำนวนคี่

r แทนข้อความ xy เป็นจำนวนคู่

เปลี่ยนเหตุและผลที่โจทย์กำหนดให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์จะได้

**เหตุ** 1. $(p \wedge q) \rightarrow r$

2. $\sim r$

3. $p$

**ผล** $\sim q$

ตรวจสอบการสมเหตุสมผลโดยใช้กฎของการอ้างเหตุผล

| | | |
|---|---|---|
| 1) $(p \wedge q) \rightarrow r$ | เหตุข้อที่ 1 | |
| 2) $\sim r$ | เหตุข้อที่ 2 | |
| 3) $\sim(p \wedge q)$ | จาก (1) และ (2) | จากกฎผลเท็จ – เหตุเท็จ |
| 4) $\sim p \vee \sim q$ | จาก (3) | กฎเดอร์ มอกอง |
| 5) $\sim(\sim p)$ | เหตุข้อที่ 3 | |
| 6) $\sim q$ | จาก (4) และ (5) | จากกฎการตัดออก |

ดังนั้น $([(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge \sim r \wedge p) \rightarrow \sim q$ สมเหตุสมผล

**ตัวอย่างที่ 7** การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

**เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. $\sim p \rightarrow r$

3. $\sim q$

**ผล** $r$

**วิธีทำ** ใช้การพิสูจน์ทางอ้อม

สมมติให้ผล $r$ เป็นเท็จ ดังนั้น $\sim r$ เป็นจริง

| | |
|---|---|
| 1) $\sim p \rightarrow r$ | เหตุข้อที่ 2 |
| 2) $\sim r$ | สมมติให้ |
| 3) $p$ | จากข้อ (1) และ (2) จากกฎผลเท็จ – เหตุเท็จ |
| 4) $p \rightarrow q$ | เหตุข้อที่ 1 |
| 5) $q$ | จากข้อ (3) และ (4) จากกฎผลเท็จ – เหตุเท็จ |
| 6) $\sim q$ | เหตุข้อที่ 3 |
| 7) $q \wedge \sim q$ | จากข้อ (5) และ (6) (ข้อความที่ขัดแย้ง) |
| 8) $r$ | จากข้อ (1) – (6) การพิสูจน์ทางอ้อม |

ดังนั้น $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \wedge \sim q] \rightarrow r$

## แบบฝึกหัด เรื่อง การอ้างเหตุผล

**1. จงแสดงวิธีตรวจสอบการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง**

(1) เหตุ 1) $\sim p \rightarrow \sim q$

2) $p \wedge \sim q$

ผล $p$

(2) เหตุ 1) $\sim q \vee \sim r$

2) $p \rightarrow q$

3) $p$

ผล $\sim r$

(3) เหตุ 1) ถ้า $2+3 = 5$ แล้ว $5+5 = 9$

2) ถ้า $5+5 = 9$ แล้ว $9 = 10$

3) $9 \neq 10$

ผล $2+3 \neq 5$

(4) เหตุ 1) ถ้าฝนตกหรือรถติดแล้วนทีกลับบ้านช้า

2) นทีกลับบ้านช้า

3) รถไม่ติด

ผล ฝนตก

**2. จงแสดงวิธีตรวจสอบการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้กฎของการอ้างเหตุผล**

(1) เหตุ 1) $p \rightarrow \sim q$

2) $q \vee r$

3) $\sim r$

ผล $p$

(2) เหตุ 1) $p \vee q$

2) $\sim q$

3) $\sim r \rightarrow \sim p$

4) $r \rightarrow s$

ผล $s$

(3) เหตุ 1) ถ้าน้ำชาไปว่ายน้ำ แล้วอั้มไปดูภาพยนตร์

2) แอนไม่ดูโทรทัศน์

3) ถ้าน้ำชาไม่ไปว่ายน้ำ แล้วนัทไม่นอนพักผ่อน

4) นัทนอนพักผ่อนหรือแอนดูโทรทัศน์

ผล นัทนอนพักผ่อนและอั้มไปดูภาพยนตร์

**3. จงแสดงแนวคิดเพื่อตรวจสอบการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้วิธีข้อขัดแย้ง**

(1) เหตุ 1) $p \wedge q$

2) $q \rightarrow r$

3) $\sim r \vee s$

ผล $s$

(2) เหตุ 1) $\sim r$

2) $\sim p \rightarrow \sim q$

3) $p \rightarrow s$

4) $q \vee r$

ผล $s$

(3) เหตุ 1) ถ้านักเรียนขยัน แล้วนักเรียนจะสอบได้

2) ถ้านักเรียนไม่ได้รับรางวัล แล้วนักเรียนจะสอบไม่ได้

3) ถ้านักเรียนไม่ได้รับรางวัล หรือนักเรียนภูมิใจ

4) นักเรียนขยัน

ผล นักเรียนภูมิใจและนักเรียนสอบได้

## ประโยคเปิดและประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

**ประโยคเปิด (Open Sentence)**

**ประโยคเปิด** คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร และเมื่อแทนค่าของตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์

| ประโยค | ประพจน์หรือประโยคเปิด | เหตุผล |
|---|---|---|
| 1) $3 + 7 > 5 - (-2)$ | เป็นประพจน์ | เพราะตัดสินได้ว่า จริง |
| 2) นักเรียนเป็นผู้ชาย | เป็นประโยคเปิด | เพราะตัดสินไม่ได้ ไม่ทราบว่านักเรียนคนไหน |
| 3) $2 + 3$ มีค่าเท่าไร | ไม่เป็นทั้งสองประเภท | เพราะเป็นประโยคคำถาม |
| 4) 2 เป็นคำตอบของสมการ $2x + 1 = 5$ | เป็นประพจน์ | เพราะตัดสินได้ว่า จริง |
| 5) a เป็นจำนวนคู่ | เป็นประโยคเปิด | เพราะตัดสินไม่ได้ ไม่ทราบว่า a คือจำนวนใด |
| 6) $\lvert x + 4 \rvert = 7$ | เป็นประโยคเปิด | เพราะตัดสินไม่ได้ ไม่ทราบว่า x คือจำนวนใด |
| 7) คนสวมแว่นตา | เป็นประโยคเปิด | เพราะตัดสินไม่ได้ ไม่ทราบว่าคนไหน |
| 8) กรุณาอยู่ในความสงบ | ไม่เป็นทั้งสองประเภท | เพราะเป็นประโยคขอร้อง |

ประโยคเปิดเมื่อเติมข้อความบางข้อความลงไปในประโยค จะสามารถเติมตัวบ่งปริมาณได้ดังตัวอย่างในตารางต่อไปนี้

| ประโยคเปิด | เติมข้อความลงไปในประโยค |
|---|---|
| 1) นักเรียนเป็นผู้ชาย | นักเรียนทุกคนในห้องนี้เป็นผู้ชาย |
| 2) a เป็นจำนวนคู่ | จำนวนนับ a บางจำนวน เป็นจำนวนคู่ |
| 3) $\lvert x + 4 \rvert = 7$ | มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $\lvert x + 4 \rvert = 7$ |
| 4) คนสวมแว่นตา | แต่ละคนในห้องนี้สวมแว่นตา |

คำว่า ทุกคน บางคน ทุกจำนวน มีจำนวน แต่ละคน เรียกว่า **ตัวบ่งปริมาณ**

**วิชาตรรกศาสตร์มี ตัวบ่งปริมาณ 2 ชนิด คือ**

1. $\forall x$ อ่านว่า For all x หมายถึง สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ที่อยู่ในเอกภพสัมพัทธ์
2. $\exists x$ อ่านว่า For some x หมายถึง สำหรับบางค่าของ x ที่อยู่ในเอกภพสัมพัทธ์

**ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ จะมีตัวบ่งปริมาณ และประโยคเปิด**

ตัวอย่างดังในตาราง

| ประพจน์ | ตัวบ่งปริมาณ | ประโยคเปิด |
|---|---|---|
| 1. นักเรียนทุกคนในห้องนี้เป็นผู้ชาย | ทุกคน | นักเรียนเป็นผู้ชาย |
| 2. จำนวนนับ a บางจำนวน เป็นจำนวนคู่ | บางจำนวน | a เป็นจำนวนคู่ |
| 3. มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $\lvert x+4 \rvert = 7$ | มีจำนวน | $\lvert x+4 \rvert = 7$ |
| 4. แต่ละคนในห้องนี้สวมแว่นตา | แต่ละคน | คนสวมแว่นตา |
| 5. $\forall x\, [\sqrt{x} > 1]$ ; $U = N$ | $\forall x$ | $\sqrt{x} > 1$ |
| 6. $\exists x\, [x+1 = 5]$ ; $U = I$ | $\exists x$ | $x+1 = 5$ |

**การเขียนสัญลักษณ์แทนประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ**

ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ ในชีวิตประจำวัน เราละตัวบ่งปริมาณไว้ เช่น เมื่อกล่าวถึง นกมีปีก ย่อมหมายถึง “นกทุกตัวมีปีก” แต่ถ้ากล่าวถึง “คนสวมแว่น” มักหมายถึง “คนบางคนสวมแว่น” เป็นต้น แม้แต่ในวิชาคณิตศาสตร์เองบางครั้งก็จะมีตัวบ่งปริมาณไว้ในฐานที่เข้าใจ เช่น “เมื่อ x เป็นจำนวนจริง $x+0 = x$” นั้นหมายถึง สำหรับจำนวนจริง x ทุกจำนวน $x+0 = x$”

การเขียนสัญลักษณ์แทนข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ เราจะต้องกำหนดเอกภพสัมพัทธ์กำกับไว้เสมอ เพื่อให้ทราบถึงขอบเขตตัวแปรว่าแทนสิ่งใด ถ้าไม่กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ อาจจะทำให้การเขียนออกมาได้ผลต่างกัน เช่น ประโยค “นกทุกตัวมีปีก”

ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของนก เขียนแทนด้วย $\forall x$ [x มีปีก]

แต่กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของสัตว์ทั้งหมด เขียนแทนด้วย $\forall x$ [x เป็นนก $\rightarrow$ x มีปีก]

ประโยค “นกบางตัวบินได้”

ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของนก เขียนแทนด้วย $\exists x$ [x บินได้]

แต่กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของสัตว์ทั้งหมด เขียนแทนด้วย $\exists x$ [x เป็นนก $\wedge$ x บินได้]

**หมายเหตุ** 1. ข้อความที่มีตัวแปรบางข้อความไม่เป็นประโยคเปิด เช่น “$y = 3x+5$ เป็นสมการกราฟเส้นตรง”

2. ในกรณีเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตจำนวนจริง มักจะละการเขียนเอกภพสัมพัทธ์ เช่น

ประโยคเปิด

แต่ $\forall x \forall y\, [x+y = y+x]$ เป็นประพจน์

แต่ $\forall x \quad [x+y = y+x]$ เป็นประโยคเปิด

**ตัวอย่างที่ 1** จงเขียนประโยคต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์

| ประพจน์ | สัญลักษณ์ |
|---|---|
| 1. จำนวนจริง x ทุกจำนวนทำให้ $x - 3 > 10$ | $\forall x\,[x - 3 > 10]$ ; $U = R$ |
| 2. แต่ละจำนวนเต็ม a ทำให้ $a + a = a^2$ | $\forall a\,[a + a = a^2]$ ; $U = I$ |
| 3. มีจำนวนเต็มบวก x ที่มีค่ามากกว่า 5 | $\exists x\,[x > 5]$ ; $U = I^{-}$ |
| 4. มีจำนวนนับ x บางจำนวนทำให้ $x - 1 = 0$ | $\exists x\,[x - 1 = 0]$ ; $U = N$ |
| 5. จำนวนจริง x และ y ทุกจำนวนทำให้ $x > y$ | $\forall x \forall y\,[x > y]$ ; $U = R$ |
| 6. มีจำนวนเต็ม x และ y บางค่าทำให้ $x^2 + y^2 = 0$ | $\exists x \exists y\,[x^2 + y^2 = 0]$ ; $U = I$ |
| 7. แต่ละจำนวนนับ a ทุกจำนวน จะมีจำนวนนับ b ที่ทำให้ $2a + 3b = 10$ | $\forall a \exists b\,[2a + 3b = 10]$ ; $U = N$ |

**ตัวอย่างที่ 2** จงเขียนประโยคสัญลักษณ์ต่อไปนี้เป็นข้อความ

| สัญลักษณ์ | ข้อความ |
|---|---|
| 1. $\exists x$ [x เป็นจำนวนเฉพาะ] ; $U = N$ | มีจำนวนนับบางตัวเป็นจำนวนเฉพาะ |
| 2. $\forall x\,[x^2 + 1 > 7]$ ; $U = I$ | แต่ละจำนวนเต็ม x $x^2 + 1 > 7$ |
| 3. $\exists x\,[x \in N \rightarrow x \in I]$ ; $U = N$ | มี x บางจำนวนซึ่งถ้าเป็นจำนวนนับแล้วเป็นจำนวนเต็ม |
| 4. $\forall x\,[x > -1 \vee x < 0]$ ; $U = R$ | จำนวนจริง x ทุกจำนวนทำให้ $x > -1$ หรือ $x < 0$ |
| 5. $\forall x \forall y\,[x^2 + y > 0]$ ; $U = I$ | จำนวนเต็ม x และ y ทุกจำนวนทำให้ $x^2 + y > 0$ |
| 6. $\forall x \exists y\,[x - y = 3]$ ; $U = R$ | แต่ละจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y บางค่าทำให้ $x - y = 3$ |
| 7. $\exists x \exists y\,[x^2 < y^2]$ ; $U = N$ | มีจำนวนนับ x และ y บางค่าทำให้ $x^2 < y^2$ |

## แบบฝึกหัด เรื่อง ประโยคเปิดและประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

**1. ประโยคต่อไปนี้เป็นประโยคเปิดหรือประพจน์ แล้วทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่เป็นคำตอบ**

| ประโยค | ประพจน์ | ประโยคเปิด |
|---|---|---|
| 1. 15 เป็นจำนวนเฉพาะ | | |
| 2. เขาเป็นนักคณิตศาสตร์ | | |
| 3. $x + x = x^2$ | | |
| 4. 5 เป็นคำตอบของสมการ $3x + 1 = 7$ | | |
| 5. $x^2 - 2x = 3$ | | |
| 6. $\|-70\| = \|70\|$ | | |
| 7. $\|x - 4\| > 3$ | | |
| 8. $3 < 5$ และ $-7 > -4$ | | |

**2. จงเขียนประโยคต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์**

| ประพจน์ | สัญลักษณ์ |
|---|---|
| 1. จำนวนจริง x ทุกจำนวนมากกว่า 0 | |
| 2. แต่ละจำนวนเต็ม a ทำให้ $a + a = 2a$ | |
| 3. มีจำนวนเต็ม x บางจำนวนที่ทำให้ $x^2 - 4 = 0$ | |
| 4. มีจำนวนเต็ม x และ y บางจำนวนทำให้ $x^2 > y$ | |
| 5. มีจำนวนเต็ม x ทกจำนวนจะมีจำนวนเต็ม y บางจำนวนที่ทำให้ $2x + y = 5$ | |
| 6. สำหรับจำนวนนับ a และ b ทุกจำนวน ทำให้ $2a \neq 3b$ | |

**3. จงเขียนประโยคสัญลักษณ์ต่อไปนี้เป็นข้อความ**

| สัญลักษณ์ | ประพจน์ |
|---|---|
| 1. $\forall x$ [x เป็นจำนวนคู่], $U = R$ | |
| 2. $\exists x [\|x - 4\| > 3]$, $U = I$ | |
| 3. $\exists x$ [$x > 2$ หรือ $x < 3$], $U = R$ | |
| 4. $\forall x \forall y [x^2 < y]$, $U = I$ | |
| 5. $\exists x \exists y [x - y = x + y]$, $U = R$ | |
| 6. $\exists x \forall y [x + y < y^2]$, $U = N$ | |

## ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว

**ตัวบ่งปริมาณทางคณิตศาสตร์**

"$\forall$" แทนคำว่า "ทั้งหมด"

$\forall x$ หมายถึง สำหรับทุก ๆ ค่าของ x, สำหรับแต่ละค่าของ x

"$\exists$" แทนคำว่า "มีอย่างน้อยหนึ่ง"

$\exists x$ หมายถึง สำหรับอย่างน้อยหนึ่งค่าของ x, มีบางค่าของ x

**ค่าความเป็นจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว**

ถ้า P(x) แทนประโยคเปิดที่อยู่ในรูปตัวแปร x

1. $\forall x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ P(a) เป็นจริง สำหรับทุกค่าของ a ในเอกภพสัมพัทธ์

$\forall x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ มี a ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ P(a) เป็นเท็จ

2. $\exists x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มี a ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ P(a) เป็นจริง

$\exists x\,[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ P(a) เป็นเท็จ สำหรับทุกค่าของ a ในเอกภพสัมพัทธ์

จากค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณข้างต้น สามารถสรุปขั้นตอนในการหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณได้ดังนี้

ให้นำสมาชิก a ใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ ไปแทนตัวแปร x ในประโยคเปิดทีละสมาชิก แล้วพิจารณาค่าความจริงที่ได้ในแต่ละค่า ถ้า

1. ค่าความจริงเป็นจริงทุกสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ $\forall x$ เป็นจริง
   $\exists x$ เป็นจริง
2. ค่าความจริงเป็นจริงบ้าง เป็นเท็จบ้าง $\forall x$ เป็นเท็จ
   $\exists x$ เป็นจริง
3. ค่าความจริงเป็นเท็จทุกสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ $\forall x$ เป็นเท็จ
   $\exists x$ เป็นเท็จ

**ข้อสังเกต** $\forall x$ ; พบเท็จกรณีเดียว จะได้ค่าความจริงเป็น เท็จ

$\exists x$ ; พบจริงกรณีเดียว จะได้ค่าความจริงเป็น จริง

**ตัวอย่าง** จงหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้

1) $\forall x\,[x + 3 < 6]$, $U = \{1, 2, 3, 4\}$

**วิธีทำ** ประโยค $x + 3 < 6$

แทน x ด้วยสมาชิกที่อยู่ในเอกภพสัมพัทธ์ จะได้

ถ้า $x = 1$ จะได้ $1 + 3 < 6$ เป็น จริง

ถ้า $x = 2$ จะได้ $2 + 3 < 6$ เป็น จริง

ถ้า $x = 3$ จะได้ $3 + 3 < 6$ เป็น จริง

ถ้า $x = 4$ จะได้ $4 + 3 < 6$ เป็น เท็จ

พบค่าความเป็น เท็จ ดังนั้น

$\forall x\,[x + 3 < 6]$, $U = \{1, 2, 3, 4\}$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

2) $\exists x\,[x + x = x^2]$, $U = \{-1, 0, 1, 2\}$

**วิธีทำ** ประโยค $x + 3 < 6$

แทน x ด้วยสมาชิกที่อยู่ในเอกภพสัมพัทธ์ จะได้

ถ้า $x = -1$ จะได้ $(-1) + (-1) = (-1)^2$ เป็น จริง

ถ้า $x = 0$ จะได้ $(0) + (0) = (0)^2$ เป็น จริง

พบค่าความเป็น จริง ดังนั้น

$\exists x\,[x + x = x^2]$,$U = \{-1, 0, 1, 2$มีค่าความจริงเป็น จริง

3) $\forall x\,[x^2 + 2x - 1 > 0]$, $U = N$

**วิธีทำ** แทน x ด้วยจำนวนนับใด ๆ

ถ้า $x = 1$ จะได้ $(1)^2 + 2(1) - 1 > 0$ เป็น จริง

ถ้า $x = 2$ จะได้ $(2)^2 + 2(2) - 1 > 0$ เป็น จริง

ถ้า $x = 3$ จะได้ $(3)^2 + 2(3) - 1 > 0$ เป็น จริง

ถ้า $x = 4$ จะได้ $(4)^2 + 2(4) - 1 > 0$ เป็น จริง

พบค่าความจริงเป็นจริงเสสมอไม่ว่าแทน x ด้วยจำนวนนับใด ๆ ดังนั้น

$\forall x\,[x^2 + 2x - 1 > 0]$, $U = N$ มีค่าความจริงเป็น จริง

## แบบฝึกหัด เรื่อง ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว

**จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อ A = {0, 1, 2, 3} และ B = {-2, -1, 0, 1, 2}**

1. $\forall x$ [ x เป็นจำนวนคู่] ; U = A **ตอบ** ........................................
2. $\forall x$ [ x เป็นจำนวนนับ] ; U = A **ตอบ** ........................................
3. $\forall x$ [ x เป็นจำนวนนับ] ; U = A **ตอบ** ........................................
4. $\forall x\,[x - 5 < 2]$ ; U = B **ตอบ** ........................................
5. $\forall x\,[\sqrt{x} = 1]$ ; U = A **ตอบ** ........................................
6. $\exists x\,[\,|x - 4| > 3]$ ; U = A **ตอบ** ........................................
7. $\exists x\,[x > 1]$ ; U = A **ตอบ** ........................................
8. $\exists x\,[x + 1 = 7]$ ; U = B **ตอบ** ........................................
9. $\exists x\,[\,|x| > 3]$ ; U = B **ตอบ** ........................................
10. $\exists x\,[x > 4 \vee x < 3]$ ; U = B **ตอบ** ........................................
11. $\forall x$ [x > 0 และ $x \in I$]; U = A **ตอบ** ........................................
12. $\forall x$ [x + 2 = 3 หรือ x < 5]; U = A **ตอบ** ........................................
13. $\exists x\,[\,|x + 4| > 10]$ ; U = R **ตอบ** ........................................
14. $\forall x$ [ x เป็นจำนวนคู่] ; U = R **ตอบ** ........................................
15. $\forall x$ [x เป็นจำนวนนับ $\rightarrow x \neq 5$]; U = B **ตอบ** ........................................
16. $\forall x\,[x > 0 \wedge x^2 - 2x = 3]$; U = A **ตอบ** ........................................
17. $\exists x\,[x > 1] \vee \forall x\,[x + 4 > 10]$ ; U = A **ตอบ** ........................................
18. $\exists x\,[x + x = x - x] \wedge \forall x$ [x เป็นจำนวนนับ] ; U = A **ตอบ** ........................................
19. $\exists x\,[|x| > 3] \vee \forall x\,[x > -4]$ ; U = B **ตอบ** ........................................
20. $\forall x\,[x + x = 2x] \rightarrow \exists x\,[x^2 - 2x = 3]$ ; U = B **ตอบ** ........................................

## ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

**ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว**

ถ้า $P(x, y)$ แทนประโยคเปิดที่อยู่ในรูปตัวแปร $x, y$

1. $\forall x \forall y\,[P(x, y)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร $x$ และ $y$ ด้วยสมาชิก $a, b$ ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(a, b)$ เป็นจริงเสมอ

$\forall x \forall y\,[P(x, y)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร $x$ และ $y$ ด้วยสมาชิก $a, b$ บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(a, b)$ เป็นจริงเท็จ

2. $\exists x \exists y\,[P(x, y)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร $x$ และ $y$ ด้วยสมาชิก $a, b$ บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(a, b)$ เป็นจริง

$\exists x \exists y\,[P(x, y)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร $x$ และ $y$ ด้วยสมาชิก $a, b$ ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(a, b)$ เป็นเท็จเสมอ

3. $\forall x \exists y\,[P(x, y)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร $x$ ด้วยสมาชิก $a$ ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วทำให้ $\exists y\,[P(a, b)]$ เป็นจริง

$\forall x \exists y\,[P(x, y)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร $x$ ด้วยสมาชิก $a$ บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วทำให้ $\exists y\,[P(a, b)]$ เป็นเท็จ

4. $\exists x \forall y\,[P(x, y)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร $x$ ด้วยสมาชิก $a$ บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วทำให้ $\forall y\,[P(a, b)]$ เป็นจริง

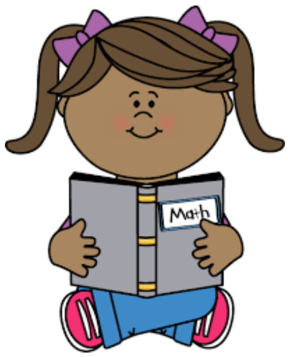
$\exists x \forall y\,[P(x, y)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร $x$ ด้วยสมาชิก $a$ ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วทำให้ $\forall y\,[P(a, b)]$ เป็นเท็จ

**หมายเหตุ** $\forall x \forall y\,[P(x, y)]$ หมายถึง $\forall x\,[\forall y\,[P(x, y)]]$

$\forall x \exists y\,[P(x, y)]$ หมายถึง $\forall x\,[\exists y\,[P(x, y)]]$

$\exists x \forall y\,[P(x, y)]$ หมายถึง $\exists x\,[\forall y\,[P(x, y)]]$

$\exists x \exists y\,[P(x, y)]$ หมายถึง $\exists x\,[\exists y\,[P(x, y)]]$



**ตัวอย่าง** จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall x \forall y\,[x + y < 0]$ เอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, -2, 1\}$

**วิธีทำ** พบว่าแทน x ด้วย 1 จะได้ $\forall y\,[1 + y < 0]$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x \forall y\,[x + y < 0]$ เป็นเท็จ

2. $\exists x \forall y\,[x + y \neq 3]$ เอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{1, 2, 0, 4\}$

**วิธีทำ** พบว่าแทน x ด้วย 0 จะได้ $\forall y\,[0 + y \neq 3]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \forall y\,[x + y \neq 3]$ เป็นจริง

3. $\forall x \exists y\,[x + y \neq 3]$ เอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{1, 2, 0, 4\}$

**วิธีทำ** พบว่าแทน $x = 1$ จะได้ $\exists y\,[1 + y \neq 3]$ เป็นจริง

พบว่าแทน $x = 2$ จะได้ $\exists y\,[2 + y \neq 3]$ เป็นจริง

พบว่าแทน $x = 0$ จะได้ $\exists y\,[0 + y \neq 3]$ เป็นจริง

พบว่าแทน $x = 4$ จะได้ $\exists y\,[4 + y \neq 3]$ เป็นจริง

พบว่าแทน a ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $\exists y\,[P(a, y)]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x \exists y\,[x + y \neq 3]$ เป็นจริง

4. $\exists x \exists y\,[x + y = xy]$ เอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{0, 1, 2\}$

**วิธีทำ** แทน $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้ $\exists y\,[0 + y = (0)y]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \exists y\,[x + y = xy]$ เป็นจริง

## แบบฝึกหัด เรื่อง ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

**จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้**

……….……. 1. $\forall x \forall y\,[x + y^2 > 7]$, $U = \{3, 4, 5\}$

……….……. 2. $\forall x \forall y\,[x^2 - y < 3]$, $U = \{-1, 1, 2\}$

……….……. 3. $\forall x \forall y\,[x + y < xy]$, $U = \{0, 1, 2\}$

……….……. 4. $\forall x \forall y\,[x^2 y > xy]$, $U = R$

……….……. 5. $\forall x \forall y\,[x + y = x - y]$, $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

……….……. 6. $\exists x \exists y\,[x^2 + y^2 = 9]$, $U = \{0, 2, 3\}$

……….……. 7. $\exists x \exists y\,[x + y \leq y]$, $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$

……….……. 8. $\exists x \exists y\,[x + y = x - y]$, $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

……….……. 9. $\exists x \exists y\,[x^2 y > xy]$, $U = R$

……….……. 10. $\exists x \exists y\,[(y - x)^3 = (y^3 - x^3)]$, $U = R$

……….……. 11. $\forall x \exists y\,[xy = 1]$, $U = I$

……….……. 12. $\forall x \exists y\,[xy = 1]$, $U = R$

……….……. 13. $\forall x \exists y\,[xy = x]$, $U = I$

……….……. 14. $\forall x \exists y\,[x + y \geq 0]$, $U = \{0, 1, 2, 3\}$

……….……. 15. $\forall y \exists x\,[y - x^2 > 5]$, $U = I^-$

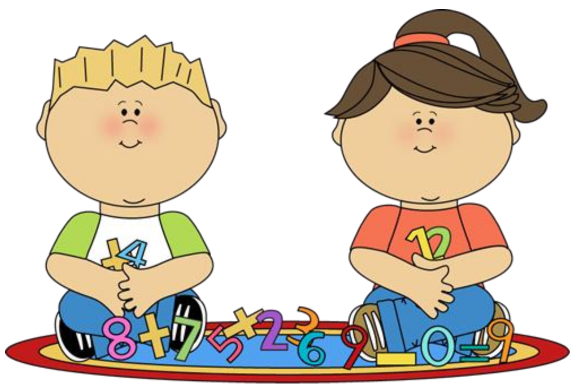
……….……. 16. $\exists x \forall y\,[x + y = y]$, $U = \{0, 1, 2, 3\}$

……….……. 17. $\exists y \forall x\,[y - x^2 > 5]$, $U = I^-$

……….……. 18. $\exists x \forall y\,[xy = x]$, $U = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

……….……. 19. $\exists x \forall y\,[x + y = y]$, $U = I$

……….……. 20. $\exists x \forall y\,[x + y \geq 0]$, $U = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$



## การสมมูลกันของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

พิจารณาประโยคเปิด $P(x) \rightarrow Q(x)$ กับ $\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)$ ถ้าแทน x ด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ U

ประโยค $P(x) \rightarrow Q(x)$ จะเปลี่ยนเป็นประพจน์ $p \rightarrow q$

ประโยค $\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)$ จะเปลี่ยนเป็นประพจน์ $\sim q \rightarrow \sim p$

เนื่องจาก $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$

ดังนั้น $P(x) \rightarrow Q(x)$ สมมูลกับ $\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)$

เราเรียกการสมมูลดังกล่าวนี้ว่า **การสมมูลกันของประโยคเปิด**

ถ้าเราทำประโยคเปิดให้เป็นประพจน์ด้วยการเติมตัวบ่งปริมาณ พร้อมทั้งกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ ประโยคเปิดดังกล่าวก็จะกลายเป็นประพจน์ที่สมมูลกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ที่กำหนดให้

1. $\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)]$ สมมูลกับ $\forall x\, [\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)]$
   $\exists x\, [P(x) \rightarrow Q(x)]$ สมมูลกับ $\exists x\, [\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)]$
2. $\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)]$ สมมูลกับ $\forall x\, [\sim P(x) \vee Q(x)]$
   $\exists x\, [P(x) \rightarrow Q(x)]$ สมมูลกับ $\exists x\, [\sim P(x) \vee Q(x)]$
3. $\forall x\, [\sim (P(x) \wedge Q(x))\, ]$ สมมูลกับ $\forall x\, [\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$
   $\exists x\, [\sim (P(x) \wedge Q(x))\, ]$ สมมูลกับ $\exists x\, [\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$

**ตัวอย่างที่ 1** ประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกัน เมื่อกำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

1) $\forall x\, [x + 1 = 3 \wedge x \neq 2]$ สมมูลกับ $\forall x\, [x \neq 2 \wedge x + 1 = 3]$

2) $\exists x\, [x^2 < 4 \vee x < 2]$ สมมูลกับ $\exists x\, [x < 2 \vee x^2 < 4]$

3) $\forall x\, [(x = 2) \rightarrow (x^2 = 4)]$ สมมูลกับ $\forall x\, [(x^2 \neq 4) \rightarrow (x \neq 2)]$

   $\forall x\, [(x = 2) \rightarrow (x^2 = 4)]$ สมมูลกับ $\forall x\, [(x \neq 2) \vee (x^2 = 4)]$

4) $\exists x\, [\sim(x$ เป็นจำนวนอตรรกยะ และ $x = \pi)]$ สมมูลกับ

   $\exists x\, [\, x$ ไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ หรือ $x \neq \pi)]$

5) $\forall x\, [x(x + 1) = 0 \rightarrow (x = 0 \vee x + 1 = 0)\, ]$ สมมูลกับ

   $\forall x\, [(x \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0) \rightarrow x\, (x + 1) \neq 0]$

เนื่องจากประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณเป็นประพจน์ ดังนั้นรูปแบบที่สมมูลกันของประพจน์เราก็สามารถนำมาใช้กับประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณได้เช่นกัน เช่น

ให้ $\forall x[P(x)]$ เป็นประพจน์ที่เปรียบเหมือนกับประพจน์ p

$\exists x[P(x)]$ เป็นประพจน์ที่เปรียบเหมือนกับประพจน์ q

1) เนื่องจากประพจน์ที่มีรูปแบบ $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$

ดังนั้น $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$ (อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ )

สมมูลกับ $\sim\exists x[Q(x)] \rightarrow \sim\forall x[P(x)]$ (อยู่ในรูป $\sim q \rightarrow \sim p$)

2) เนื่องจากประพจน์ที่มีรูปแบบ $\sim(p \wedge q)$ สมมูลกับ $\sim p \vee \sim q$

ดังนั้น $\sim(\forall x[P(x)] \wedge \exists x[Q(x)])$ (อยู่ในรูป $\sim(p \wedge q)$ )

สมมูลกับ $\sim\forall x[P(x)] \vee \sim\exists x[Q(x)]$ (อยู่ในรูป $\sim p \vee \sim q$)

**ตัวอย่างที่ 2** จงยกตัวอย่างประพจน์ที่สมมูลกับประพจน์ต่อไปนี้

1) $\sim[\forall x[P(x)]] \rightarrow \exists x[Q(x)]$

2) $\forall x[P(x)] \wedge \{\exists x[Q(x)] \vee \forall x[R(x)]\}$

3) $\forall x[P(x)] \leftrightarrow \exists x[Q(x)]$

**วิธีทำ** 1) เนื่องจากประพจน์ที่โจทย์กำหนดให้อยู่ในรูปแบบ

$\sim[p \rightarrow q]$ ซึ่งสมมูลกับ $p \wedge \sim q$

ดังนั้นประพจน์ข้างต้น สมมูลกับ $\forall x[P(x)] \wedge \sim\exists x[Q(x)]$

2) เนื่องจากประพจน์ที่โจทย์กำหนดให้อยู่ในรูปแบบ

$p \wedge (q \vee r)$ ซึ่งสมมูลกับ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ดังนั้นประพจน์ข้างต้น สมมูลกับ

$\{\forall x[P(x)] \wedge \exists x[Q(x)]\} \vee \{\forall x[P(x)] \wedge \exists x[R(x)]\}$

3) เนื่องจากประพจน์ที่โจทย์กำหนดให้อยู่ในรูปแบบ

$p \leftrightarrow q$ ซึ่งสมมูลกับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

ดังนั้นประพจน์ข้างต้น สมมูลกับ

$\{\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]\} \wedge \{\exists x[Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)]\}$

## แบบฝึกหัด เรื่อง การสมมูลกันของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

1. จงหาประพจน์ที่สมมูลกับประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

1) $\exists x\,[x < 5 \wedge |x| > 2]$

....................................................................................................................

2) $\forall x\,[(x+\sqrt{x}=3) \wedge (x^2-1>0)]$

....................................................................................................................

3) $\exists x[(x > 5) \rightarrow (x^2 > 5x)]$

....................................................................................................................

....................................................................................................................

4) $\exists x\,[x > 5] \wedge \forall x$ [x เป็นจำนวนคี่]

....................................................................................................................

5) $\forall x[x \neq 1] \vee \forall x$ [x เป็นจำนวนคู่]

....................................................................................................................

6) $\forall x[x^2 > 2x] \wedge \sim\exists x\,[x+\sqrt{x} \neq 3]$

....................................................................................................................

7) $\exists x[x \neq 0] \vee \forall x\,[x-3>0]$

....................................................................................................................

8) $\forall x\,[x \neq 1] \rightarrow \exists x\,[x-3>7]$

....................................................................................................................

....................................................................................................................

9) $\sim[\exists x[x - 4 > 2]] \rightarrow \sim[\forall x[x^2 = 6]]$

....................................................................................................................

....................................................................................................................

10) $\forall x\,[x \neq 0] \leftrightarrow \exists x\,[x-3>0]$

....................................................................................................................

....................................................................................................................

## นิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

**นิเสธของ $\forall x[P(x)]$**

นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ $\forall x[P(x)]$ และใช้สัญลักษณ์ $\sim\forall x[P(x)]$ แทนนิเสธของ $\forall x[P(x)]$

นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ มีความหมายเหมือนกับ $\exists x[\sim P(x)]$

นั่นคือ $\sim\forall x[P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x[\sim P(x)]$

**ตัวอย่างที่ 1** จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x[x > 2]$

2) $\forall x[x + 5 = 7]$

3) จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง

4) นักเรียนในห้องนี้ทุกคนสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

**วิธีทำ**

1) นิเสธของ "$\forall x[x > 2]$" คือ "$\exists x[x \leq 2]$"

2) นิเสธของ "$\forall x[x + 5 = 7]$" คือ "$\exists x[x + 5 \neq 7]$"

3) นิเสธของ "จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง" คือ "มีจำนวนตรรกยะบางจำนวนไม่เป็นจำนวนจริง"

4) นิเสธของ "นักเรียนในห้องนี้ทุกคนสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์" คือ "มีนักเรียนบางคนในห้องนี้สอบไม่ผ่านวิชาคณิตศาสตร์"

**นิเสธของ $\exists x[P(x)]$**

นิเสธของ $\exists x[P(x)]$ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ $\exists x[P(x)]$ และใช้สัญลักษณ์ $\sim\exists x[P(x)]$ แทนนิเสธของ $\exists x[P(x)]$

นิเสธของ $\exists x[P(x)]$ มีความหมายเหมือนกับ $\forall x[\sim P(x)]$

นั่นคือ $\sim\exists x[P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim P(x)]$

**ตัวอย่างที่ 2** จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) $\exists x[x + 2 \geq 0]$

2) $\exists x[x^2 + x = 5]$

3) มีจำนวนเต็มบางจำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ

4) มีนักเรียนในห้องนี้อย่างน้อยหนึ่งคนที่สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้

**วิธีทำ** 1) นิเสธของ "$\exists x[x + 2 \geq 0]$" คือ "$\forall x[x + 2 < 0]$"

2) นิเสธของ "$\exists x[x^2 + x = 5]$" คือ "$\forall x[x^2 + x \neq 5]$"

3) นิเสธของ "มีจำนวนเต็มบางจำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ" คือ
"จำนวนเต็มทุกจำนวนไม่เป็นจำนวนตรรกยะ"

4) นิเสธของ "มีนักเรียนในห้องนี้อย่างน้อยหนึ่งคนที่สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้" คือ
"นักเรียนทุกคนในห้องนี้สอบเข้ามหาวิทยาลัยไม่ได้"

**ข้อสังเกต** นิเสธของ $\forall x$ ต้องเปลี่ยนเป็น $\exists x$ แล้วใส่ $\sim$ หน้าประโยคเปิด
(นั่นคือ ทำประโยคเปิดให้อยู่ในรูปตรงข้าม)
นิเสธของ $\exists x$ ต้องเปลี่ยนเป็น $\forall x$ แล้วใส่ $\sim$ หน้าประโยคเปิด

**ตัวอย่างที่ 3**

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\sim\forall x[x^2 > 5]$ | สมมูลกับ | $\exists x[x^2 \ngtr 5]$ |
| | สมมูลกับ | $\exists x[x^2 < 5]$ |
| 2) $\sim\forall x[x^2 = 4]$ | สมมูลกับ | $\exists x[x^2 \neq 4]$ |
| 3) $\sim\exists x[x^2 \leq 1]$ | สมมูลกับ | $\exists x[x^2 \nleq 1]$ |
| | สมมูลกับ | $\exists x[x^2 > 1]$ |
| 4) $\sim\exists x[x^2 + 1 = 0]$ | สมมูลกับ | $\forall x[x^2 + 1 \neq 0]$ |

ในทำนองเดียวกัน ถ้าประพจน์ดังกล่าวมีตัวบ่งปริมาณมากกว่าหนึ่งตัวขึ้นไป เราจะใช้หลักการดังกล่าวข้างต้นหานิเสธของประพจน์ดังกล่าวได้ดังนี้

| | | |
|---|---|---|
| $\sim\forall x\forall y[P(x, y)]$ | สมมูลกับ | $\sim\forall x[\forall y[P(x, y)]]$ |
| | สมมูลกับ | $\exists x[\sim\forall y[P(x, y)]]$ |
| | สมมูลกับ | $\exists x\exists y[\sim P(x, y)]$ |

**สรุป** นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว สามารถหาได้ดังนี้

| | | |
|---|---|---|
| $\sim\forall x\forall y[P(x, y)]$ | คือ | $\exists x\exists y[\sim P(x, y)]$ |
| $\sim\forall x\exists y[P(x, y)]$ | คือ | $\exists x\forall y[\sim P(x, y)]$ |
| $\sim\exists x\exists y[P(x, y)]$ | คือ | $\forall x\forall y[\sim P(x, y)]$ |
| $\sim\exists x\forall y[P(x, y)]$ | คือ | $\forall x\exists y[\sim P(x, y)]$ |

**ตัวอย่างที่ 4** 1) นิเสธของ $\forall x \exists y[x^2 + y^2 > 5]$ คือ $\exists x \forall y[x^2 + y^2 \leq 5]$

2) นิเสธของ $\exists x \exists y[x + y = 7]$ คือ $\exists x \forall y[x + y \neq 7]$

3) นิเสธของ $\forall x \forall y[x^2 + y^2 = 4]$ คือ $\exists x \exists y[x^2 + y^2 \neq 4]$

4) นิเสธของ $\exists x \forall y[x > y + x]$ คือ $\forall x \exists y[x \leq y + x]$

**ตัวอย่างที่ 5** 1) นิเสธของ $\forall x[(x + 3 = 4) \rightarrow x^2 = 9]$

คือ $\exists x[\sim\{(x + 3 = 4) \rightarrow x^2 = 9\}]$

หรือ $\exists x[(x + 3 = 4) \wedge x^2 \neq 9]$

2) นิเสธของ $\exists x[(x = 5) \vee x = \pi]$

คือ $\forall x[\sim\{(x = 5) \vee x = \pi\}]$

หรือ $\forall x[(x \neq 5) \wedge x \neq \pi]$

3) นิเสธของ $\forall x \exists y[(x + y < 4) \wedge (x - y > 5)]$

คือ $\exists x \forall y[\sim\{(x + y < 4) \wedge (x - y > 5)\}]$

หรือ $\exists x \forall y[(x + y \geq 4) \vee (x - y \leq 5)]$

4) นิเสธของ $\exists x \forall y \forall z[(x + y + z \neq 10) \rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 \neq 25)]$

คือ $\forall x \exists y \exists z[\sim\{(x + y + z \neq 10) \rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 \neq 25)\}]$

หรือ $\forall x \exists y \exists z[(x + y + z \neq 10) \wedge (x^2 + y^2 + z^2 = 25)]$

**ตัวอย่างที่ 6** จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1) $\forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)]$

2) $\sim\{\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]\}$

**วิธีทำ** 1) เนื่องจาก $\forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)]$ อยู่ในรูปแบบ $p \wedge q$

ดังนั้น นิเสธของรูปแบบของประพจน์ดังกล่าว คือ $\sim p \vee \sim q$

นั่นคือ $\sim \forall x[P(x)] \vee \sim \forall x[Q(x)]$

หรือ $\exists x[\sim P(x)] \vee \exists x[\sim Q(x)]$

2) เนื่องจาก $\sim\{\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]\}$ อยู่ในรูปแบบ $\sim(p \rightarrow q)$

ดังนั้น นิเสธของรูปแบบของประพจน์ดังกล่าว คือ $p \rightarrow q$

นั่นคือ $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$

## แบบฝึกหัด เรื่อง นิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

**จงเขียนประพจน์ที่เป็นนิเสธกับประพจน์ที่กำหนดในตารางต่อไปนี้**

| ประพจน์ที่กำหนด | ประพจน์ที่เป็นนิเสธ |
|---|---|
| 1. $\exists x\,[x > 5]$ | ........................................................................ |
| 2. $\exists x\,[x = 15 \lor x < 2]$ | ........................................................................ |
| 3. $\forall x[x \neq 1] \lor \forall x$ [x เป็นจำนวนคู่] | ........................................................................ |
| 4. $\exists x\,[P(x)] \lor \exists x\,[Q(x)]$ | ........................................................................ |
| 5. $\exists x\,[x = 10 \land x - 1 < 2]$ | ........................................................................ |
| 6. $\forall x\,[x \neq 1] \land \exists x\,[x - 3 > 7]$ | ........................................................................ |
| 7. $\exists x\,[P(x)] \land \exists x\,[Q(x)]$ | ........................................................................ |
| 8. $\exists x\,[x < 4 \rightarrow x + 8 > 2]$ | ........................................................................ |
| 9. $\forall x\,[P(x)] \rightarrow \exists x\,[Q(x)]$ | ........................................................................ |
| 10. $\forall x\,[x \neq 0] \rightarrow \exists x\,[x - 1 \leq 0]$ | ........................................................................ |
| 11. $\sim\exists x\,[x = 10] \rightarrow \exists x\,[x > 3]$ | ........................................................................ |
| 12. $\exists x\,[x > 5 \leftrightarrow x + 1 \geq 10]$ | ........................................................................ |
| 13. $\forall x\,\exists y\,[x + y = 7]$ | ........................................................................ |
| 14. $\forall x \forall y[x + y = y^2]$ | ........................................................................ |
| 15. $\exists x \forall y[x + y > y^2 - 5]$ | ........................................................................ |
| 16. $\exists x \exists y[x^2 = y^2]$ | ........................................................................ |
| 17. $\forall x \exists y[x^2 > y^2 - 7]$ | ........................................................................ |
| 18. $\forall x \exists y[x^2 + y = y - 1 \rightarrow x$ เป็นจำนวนเต็ม] | ........................................................................ |
| 19. $\exists x \forall y \exists z[x^2 > y^2 + z \rightarrow x + y = z = 1]$ | ........................................................................ |
| 20. $\forall x \exists y \exists z[x > y \land y > z]$ | |

## แบบทดสอบ เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

**จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด แล้วกากบาท × ทับข้อที่เป็นคำตอบนั้น**

1. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   1) " ถ้า $x$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 > x$ " ไม่เป็นประพจน์เพราะเป็นประโยคที่มีตัวแปร $x$

   2) "ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x^2 \geq 1$" เป็นประพจน์เพราะมีค่าความจริงเป็นจริง

   3) "ถ้า $|x| < 7$ แล้ว $-7 < x < 7$ เมื่อ $x$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ" เป็นประพจน์เพราะมีค่าความจริงเป็นจริง

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   ก. ข้อความ 1) – 3) ถูกต้องทุกข้อ

   ข. ข้อความ 1) – 3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

   ค. ข้อความ 1) – 3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ

   ง. ข้อความ 1) – 3) ผิดทุกข้อ

2. ถ้า A, B และ C เป็นประพจน์ ข้อความใดไม่ถูกต้อง

   ก. ถ้า $(A \wedge B) \rightarrow C$ เป็นเท็จ สรุปได้ว่า A, B เป็นจริง

   ข. ถ้า $(A \wedge B) \rightarrow C$ เป็นจริง และ C เป็นเท็จ สรุปได้ว่า B เป็นเท็จ

   ค. ถ้า $(A \vee B) \rightarrow C$ เป็นเท็จ และ A เป็นเท็จ สรุปได้ว่า B เป็นจริง

   ง. ถ้า $(A \vee B) \rightarrow C$ เป็นจริง และ C เป็นเท็จ สรุปได้ว่า A, B เป็นเท็จ

3. ถ้า $(P \wedge Q) \rightarrow R$ มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้ว จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   1) $R \rightarrow (\sim P \wedge Q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

   2) $P \wedge (\sim Q \rightarrow P)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

   3) $[\sim R \wedge (P \vee Q)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

   4) $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

   ข้อความ 1) – 4) มีข้อที่ถูกต้องกี่ข้อ

   ก. 1 ข้อ

   ข. 2 ข้อ

   ค. 3 ข้อ

   ง. 4 ข้อ

4. กำหนดให้

p คือประพจน์ “ถ้า a, b และ c เป็นจำนวน ab < ac แล้ว b < c”

และ q คือประพจน์ “ถ้า x และ y เป็นจำนวนอตรรยะ แล้ว x + y เป็นจำนวนอตรรกยะ”

ประพจน์ใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นจริง

ก. $p \wedge \sim q$

ข. $p \wedge q$

ค. $\sim p \wedge \sim q$

ง. $\sim p \wedge q$

5. ให้ p และ q เป็นประพจน์ ถ้า p * q เป็นพจน์ที่มีค่าความจริงตามตารางข้างล่างนี้

| **p** | **q** | **p * q** |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

แล้วประพจน์ p * q สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

ก. $\sim(\sim p \rightarrow q)$

ข. $\sim p \rightarrow q$

ค. $\sim(q \rightarrow \sim p)$

ง. $q \rightarrow \sim p$

6. ข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง

ก. $(p\rightarrow q)$ ไม่สมมูลกับ $\sim p\vee q$

ข. $\sim(p\wedge q)\vee r$ สมมูลกับ $r\vee(\sim p\wedge\sim q)$

ค. $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ สมมูลกับ $\sim r\rightarrow(p\wedge\sim q)$

ง. $p\rightarrow(q\wedge r\}$ สมมูลกับ $\sim(p\vee(\sim q\vee\sim r)$

7. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ แล้ว $\sim[(p\wedge q) \rightarrow (\sim q\vee r)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใด

ก. $p \wedge \sim(q \rightarrow r)$

ข. $\sim q \vee (\sim p\wedge r)$

ค. $\sim(p\wedge q) \wedge (q \wedge r)$

ง. $\sim(p\wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$

8. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(\sim p \vee q) \vee r]$ เป็นสัจนิรันดร์

(2) $\sim(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \wedge q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ถูก

ข. ข้อความ (1) ถูก และ (2) ผิด

ค. ข้อความ (1) ผิด และ (2) ถูก

ง. ข้อความ (1) และ (2) ผิด

9. นิเสธของประพจน์ "ถ้าสมบูรณ์ขยันแล้ว จะสอบได้และจะได้รางวัล" คือข้อใด

ก. ถ้าสมบูรณ์ไม่ขยันแล้วจะสอบตกและไม่ได้รางวัล

ข. ถ้าสอบตกและไม่ได้รางวัลแล้วสมบูรณ์ไม่ขยัน

ค. สมบูรณ์ขยันแต่สอบตกหรือสมบูรณ์ขยันแต่ไม่ได้รางวัล

ง. สมบูรณ์ขยันแต่สอบตกและสมบูรณ์ขยันแต่ไม่ได้รางวัล

10. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

A. การอ้างเหตุผลข้างล่างนี้สมเหตุสมผล

**เหตุ** 1. ถ้าอุณหภูมิสูง แล้วจะมีเมฆมาก
2. ถ้ามีเมฆมาก แล้วฝนตก
3. อุณหภูมิสูง

**ผล** ฝนตก

B. การอ้างเหตุผลข้างล่างนี้สมเหตุสมผล

**เหตุ** 1. $\sim p \rightarrow q$
2. $\sim q \wedge r$
3. $\sim r$

**ผล** $p$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. A. ถูก และ B. ถูก

ข. A. ถูก และ B. ผิด

ค. A. ผิด และ B. ถูก

ง. A. ผิด และ B. ผิด

11. กำหนดการอ้างเหตุผล ซึ่งมีเหตุดังนี้

(1) ถ้าดวงใจตั้งใจเรียนหรือทำการบ้าน แล้วดวงใจจะสอบได้และได้คะแนนสูง

(2) ถ้าดวงใจสอบได้ แล้วดวงใจได้คะแนนไม่สูง

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. ดวงใจตั้งใจเรียนหรือทำการบ้าน

ข. ดวงใจไม่ตั้งใจเรียน และไม่ทำการบ้าน

ค. ดวงใจตั้งใจเรียน แต่ไม่ทำการบ้าน

ง. ดวงใจทำการบ้าน แต่ไม่ตั้งใจเรียน

12. ข้อใดไม่ใช่ประโยคเปิด

ก. $x^2 + y^2 = 10$

ข. x คือจำนวนเต็ม

ค. $x + 2 > 6$ เมื่อ $x = 4$

ง. เขาเป็นนักคณิตศาสตร์

13. ให้เอกภพสัมพัทธ์ $U = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ประพจน์ใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

ก. $\forall x[x^2 + 2x > 4]$

ข. $\exists x[x > x+2]$

ค. $\exists x[x^2 \geq 0]$

ง. $\forall x[x + 8 > 8]$

14. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{1, -1, i, -i\}$ โดยที่ $i = \sqrt{-1}$ ข้อใดมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ก. $\exists z\,[z^2 = 1]$

ข. $\forall z\,[z^{36} = 1]$

ค. $\exists z \left[\frac{1}{2} = \bar{z}\right]$

ง. $\forall z\,[z^3 - z = 0]$

15. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U โดยที่ $U=\{x \in R \mid x \leq 0\}$ จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $\sim\forall x[x^2 > 0]$ เป็นจริง

ข. $\exists x[x - 1 < 0]$ เป็นจริง

ค. $\sim\exists x[x + 1 \geq 0]$ เป็นจริง

ง. $\forall x[x^2 + 1 < 0]$ เป็นจริง

16. ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $\exists x[(x > 5) \rightarrow (x^2 > 25)]$ สมมูลกับ $\exists x[(x^2 \leq 25) \rightarrow (x \leq 5)]$

ข. $\forall x\,[(x + \sqrt{x} = 3) \wedge (x^2 - 1 < 0)]$ สมมูลกับ $\forall x\,[(x + \sqrt{x} \neq 3) \vee (x^2 - 1 < 0)]$

ค. นิเสธของ $\forall x\,[(x - 5 = 3) \wedge (x + 7 = 9)]$ คือ $\exists x\,[(x - 5 \neq 3) \vee (x + 7 \neq 9)]$

ง. นิเสธของ $\exists x\,[(x - 4 > 2) \rightarrow (x^2 = 6)]$ คือ $\forall x\,[(x - 4 > 2) \wedge (x^2 \neq 6)]$

17. ข้อความ $\exists x[\sim(x < 0 \rightarrow |x| = -x)]$ สมมูลกับข้อความใด

ก. $\exists x[x \geq 0 \vee |x| = -x]$

ข. $\exists x[x \geq 0 \wedge |x| \neq -x]$

ค. $\exists x[x < 0 \vee |x| = -x]$

ง. $\exists x[x < 0 \wedge |x| \neq -x]$

18. ข้อความในข้อใดมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ก. $\exists x \forall y\,[x^2 < y + 1]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3\}$

ข. $\forall x \exists y\,[x^2 + y^2 < 12]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3\}$

ค. $\forall x\,[|x| = x]$ เมื่อ $U = R$

ง. $\exists x\,[|x| \neq x]$ เมื่อ $U = R$

19. นิเสธของประพจน์ $\exists x \forall y\,[P(x, y) \wedge \sim Q(x, y)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใด

ก. $\exists x \forall y\,[\sim P(x, y) \vee Q(x, y)]$

ข. $\forall x \exists y\,[\sim P(x, y) \wedge Q(x, y)]$

ค. $\exists x \forall y\,[\sim P(x, y) \wedge Q(x, y)]$

ง. $\forall x \exists y\,[\sim P(x, y) \vee Q(x, y)]$

20. ข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้อง

ก. นิเสธของ $\exists x \forall y\,[x > y + x]$ คือ $\forall x \exists y\,[x < y + x]$

ข. นิเสธของ $\forall x \exists y\,[x^2 \leq y^2 - 7]$ คือ $\exists x \forall y\,[x^2 \geq y^2 - 7]$

ค. นิเสธ $\forall x \exists y \exists z\,[(x > y) \wedge (y > z)]$ คือ $\exists x \forall y \forall z\,[(x < y) \vee (y < z)]$

ง. นิเสธของ $\forall x \exists y\,[(x^2 + y = y - 1) \rightarrow$ (x เป็นจำนวนตรรกยะ)] คือ

$\exists x \forall y\,[(x^2 + y = y - 1) \wedge$ (x ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ)]