จำนวนจริงในรูปกรณฑ์

กรณฑ์ หรือค่าหลักของราก มีนิยามดังนี้

นิยาม

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จะบอกว่า y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

1. y เป็นรากที่ n ของ x
2. xy ≥ 0

จากนิยามจะเห็นว่า ถ้า y จะเป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ได้ จะได้ต้องมีคุณสมบัติครบทั้งสองข้อ มีข้อใดข้อหนึ่งไม่ได้

และเราจะเขียน $\sqrt[n]{x}$ แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x อ่านได้อีกอย่างว่า กรณฑ์ที่ n ของ x

ตัวอย่าง

-3 เป็นกรณฑ์ที่ 3 ของ -27 เพราะว่า

1. -3 เป็นรากที่ 3 ของ 3 (เนื่องจาก $-3^3 = -27$)
2. (-27)(-3) = 81 ≥ 0

-2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 แต่ -2 นั้นไม่เป็นกรณฑ์ที่ 4 ของ 16 เพราะว่า (-2)(16) = -32 < 0

สมบัติที่ควรรู้

ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ m, n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

1. $\sqrt[n]{x}$
2. $\sqrt[n]{1} = 1$
3. $\sqrt[n]{0} = 0$
4. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
5. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
6. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
7. $\sqrt[n]{a^n}$ = a เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ เช่น $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$, $\sqrt[5]{2^5} = 2$
8. $\sqrt[n]{a^n}$ = $|a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ เช่น $\sqrt[4]{2^4} = |2| = 2$, $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

สูตรลัดในการหารากที่ 2

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\infty}}}} = a \qquad \sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a}}}} = \sqrt[n-1]{a}$$

ตัวอย่าง

1.) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\infty}}} = 3$ 2.) $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\ldots}}} = \sqrt[3-1]{4} = \sqrt[2]{4} = 2$

การหาผลบวก และผลต่างของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

วิธีการหาคือ

1. อันดับของกรณฑ์ต้องเหมือนกัน
2. เลขข้างในต้องเหมือนกันด้วย โดยอาจจะทำให้เป็นจำนวนเฉพาะหรืออาจจะทำให้เป็นจำนวนที่ต่ำที่สุด

ตัวอย่าง

1.) $3\sqrt{8}-\sqrt{2}+\sqrt{32}$

$$3\sqrt{8}-\sqrt{2}+\sqrt{32} = 3\sqrt{2^3}-\sqrt{2}+\sqrt{16\cdot 2}$$

สมบัติข้อที่ 8

$$= 3(2\sqrt{2})-\sqrt{2}+\sqrt{4^2\cdot 2}$$

$$= 6\sqrt{2}-\sqrt{2}+4\sqrt{2}$$

$$= (6-1+4)\sqrt{2}$$

สมบัติการแจกแจง

$$= 9\sqrt{2}$$

การหาผลคูณและผลหารของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

หลักการก็คือ

1. อันดับของกรณฑ์ต้องเหมือนกัน
2. ถ้าอันดับของกรณฑ์ไม่เหมือนกันจะต้องทำให้อันดับเหมือนกันก่อน โดยใช้สมบัติ

ตัวอย่าง

จะเขียน $\sqrt[3]{8}\sqrt{6}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$\sqrt[3]{9}\sqrt{6}$

เนื่องจาก อันดับของกรณฑ์ ยังไม่เท่ากัน เราต้องทำให้อันดับเท่ากันก่อน

โดยการหา ครน. ของ 3 กับ 2 ซึ่งมาจากกรณฑ์ที่ 3 และกรณฑ์ที่ 2 นั่นเอง

ครน. ของ 3 กับ 2 คือ 6 ดังนั้น เราต้องทำให้ กรณฑ์ที่ 3 และ 2 กลายเป็นกรณฑ์ที่ 6

จะทำให้เป็น 6 โดย คูณ ด้วย 2

โดยการ พิจารณา $\sqrt[3]{9}$

จะได้ว่า $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{9^1}=\sqrt[3]{9^{\frac{2}{2}}}$ และ จากสมบัติข้อที่ 1 ($\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$)

จะได้ว่า $\sqrt[3\times 2]{9^2}=\sqrt[6]{9^2}$

และพิจารณา $\sqrt{6}=\sqrt[2]{6}$

จะได้ว่า $\sqrt[2]{6}=\sqrt[2]{6^{\frac{3}{3}}}=\sqrt[2\times 3]{6^3}=\sqrt[6]{6^3}$

เมื่ออันดับของกรณฑ์เท่ากันแล้ว เราสามารถทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้แล้ว

$$\sqrt[3]{9}\sqrt{6} = \sqrt[6]{9^2}\sqrt[6]{6^3}$$

$$= \sqrt[6]{9^2\times 6^3}$$

$$= \sqrt[6]{3^2\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot 2^3}$$

$$= \sqrt[6]{3^7\cdot 2^3}$$

$$= 3(\sqrt[6]{3\cdot 2^3})$$

$$= 3\sqrt[6]{24}$$

#