ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

math center

18 Jul 2016

สารบัญ

คู่อันดับ

คู่อันดับ คือ การนำสองสิ่งมาเขียนเป็นคู่อย่างมีลำดับ เช่น $(3,2)$, $(-1,0)$, $(\frac{3}{2},a)$, (สมชาย, 5) เป็นต้น
การสลับตำแหน่งของค่าในคู่อันดับ จะทำให้กลายเป็นคนละอัน กล่าวคือ $(3,2) \neq (2,3)$
กล่าวคือ คู่อันดับ 2 คู่ จะเท่ากันได้ ก็เมื่อ สมาชิกตัวหน้าเท่ากัน และ สมาชิกตัวหลังเท่ากัน

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า x และ y ที่ทำให้ $(3, x+y) = (y+1, 5y)$
<u>วิธีทำ</u> คู่อันดับจะเท่ากันได้ เมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน และสมาชิกตัวหลังเท่ากัน

$$(3, x+y) = (y+1, 5y)$$

$$\begin{aligned} 3 &= y+1 \\ 2 &= y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y &= 5y \\ x+2 &= 10 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบ คือ $x = 8$ และ $y = 2$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า x และ y ที่ทำให้ $(3x, 2y+1) = (8-2y, 2x-y)$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ทำเหมือนเดิม เพียงแต่สมการยุ่งขึ้น

นั่นคือ จะได้ $3x = 8-2y$ และ $2y+1 = 2x-y$

$3x = 8-2y$ จัดรูปได้เป็น $3x + 2y = 8$ (1)

$2y+1 = 2x-y$ จัดรูปใหม่ ได้เป็น $2x - 3y = 1$ (2)

$$\begin{array}{lrcll} 2\times(1): & 6x+4y & = & 16 & (3) \\ 3\times(2): & 6x-9y & = & 3 & (4) \\ (3)-(4): & 13y & = & 13 & \\ & y & = & 1 & \\ (1): & 3x+2 & = & 8 & \\ & 3x & = & 6 & \\ & x & = & 2 & \end{array}$$

ดังนั้น คำตอบ คือ $x = 2$ และ $y = 1$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่า x และ y ที่ทำให้คู่อันดับต่อไปนี้เท่ากัน
    1. $(x\,,\ x-y) = (2x-3\,,\ x+y)$

2. $(2x - y\ ,\ x + 2y)\ =\ (-4\ ,\ 1 + y)$

2. ถ้า $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$, $B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ จงหา $n(A \cup B)$

3. ถ้า $A = \{(1, (1, 1)), (1, (1, 2)), (2, (1, 1))\}$, $B = \{((1, 1), 1), ((1, 2), 1), ((2, 1), 1)\}$
จงหา $n(A \cup B)$

ผลคูณคาร์ทีเซียน

"ผลคูณคาร์ทีเซียน" ระหว่าง เซต A กับ เซต B แทนได้ด้วยลักษณ์ $A \times B$

หมายถึง "เซตของคู่อันดับ" ทั้งหมดที่ "ตัวหน้ามาจาก A" และ "ตัวหลังมาจาก B"

เช่น $\{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$\{a,b\} \times \{a,b\} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

$\{a,b\} \times \{0,1\} = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1)\}$

$\{0,1\} \times \{a,b\} = \{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}$

$\{1,2\} \times \{a,\{a\}\} = \{(1,a),(1,\{a\}),(2,a),(2,\{a\})\}$

$\{1,2,3\} \times \{\,\} = \{\,\}$

$\{1,2,3\} \times \{\{\,\}\} = \{(1,\{\,\}),(2,\{\,\}),(3,\{\,\})\}$

ปกติแล้ว $A \times B$ จะไม่เท่ากับ $B \times A$

เพราะลำดับก่อนหลังในคู่อันดับมีความสำคัญ กล่าวคือ $(b,1) \neq (1,b)$

อย่างไรก็ตาม $A \times B$ อาจเท่ากับ $B \times A$ ได้ ในกรณีที่ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$ หรือ $A = B$

จะเห็นว่า $A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิก $=$ จำนวนสมาชิกใน A $\times$ จำนวนสมาชิกใน B

ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

เช่น ถ้า A มีสมาชิก 4 ตัว และ B มีสมาชิก 9 ตัว แล้ว $A \times B$ จะมีสมาชิก $4 \times 9 = 36$ ตัว เป็นต้น

และสุดท้ายที่ควรรู้ (แต่ไม่ต้องจำ) คือ ผลคูณคาร์ทีเซียน สามารถกระจายใน $\cup$, $\cap$ และ $-$ ได้ กล่าวคือ

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนสมาชิกของ $\{\{1,3\},\{\,\}\} \times \{1,\{1\},\{1,\{2\}\}\}$ พร้อมทั้งเขียนผลลัพธ์

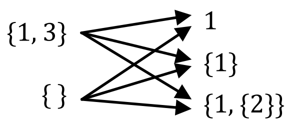
วิธีทำ ก่อนอื่น ต้องรู้ก่อนว่าเซตที่มาคูณกัน มีสมาชิกกี่ตัว อะไรบ้าง

$\{\{1,3\},\{\,\}\}$ มีสมาชิก 2 ตัว คือ $\{1,3\}$ และ $\{\,\}$

$\{1,\{1\},\{1,\{2\}\}\}$ มีสมาชิก 3 ตัว คือ 1 และ $\{1\}$ และ $\{1,\{2\}\}$

ดังนั้น ผลคูณของสองเซตนี้ จะต้องมีสมาชิก $2 \times 3 = 6$ ตัว

ซึ่งจะวาดเป็นแผนภาพการจับคู่ได้เป็น



ดังนั้น ผลคูณ $= \{\ (\{1,3\},1)\ ,\ (\{1,3\},\{1\})\ ,\ (\{1,3\},\{1,\{2\}\})\ ,$

$(\ \{\,\}\ ,\ 1)\ ,\ (\ \{\,\}\ ,\ \{1\})\ ,\ (\ \{\,\}\ ,\ \{1,\{2\}\})\ \}$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาจำนวนสมาชิกในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1. $\{a, b, c\} \times \{a, c\}$
   2. $\{1, 2, 3, \dots, 10\} \times \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
   3. $\{1, 2\} \times \{1, \{2, 3\}\}$
   4. $\{1, \{1\}, \{1, 2\}\} \times \{\{1, 2\}\}$
   5. {สมชาย , สมปอง} × {สมหญิง , สมชาย}
   6. $\{1, 2\} \times \{1, (2, 3)\}$

2. จงหาผลคูณคาร์ทีเซียนต่อไปนี้
   1. $\{a, b, c\} \times \{a, c\}$
   2. $\{1, \{2\}\} \times \{2, \{1\}\}$
   3. {สมชาย , สมปอง} × {สมชาย}
   4. $\{1, 2\} \times \{1, (2, 3)\}$

3. ข้อใดถูกต้อง
   1. $(a, 2) \in \{a, b, c\} \times \{1, 2, 3\}$
   2. $(a, 2) \in \{a, 2, c\} \times \{1, b, 3\}$
   3. $(a, 2) \in \{1, b, 3\} \times \{a, 2, c\}$
   4. $(a, 2) \in \{a, 2, c\} \times \{a, 2, c\}$

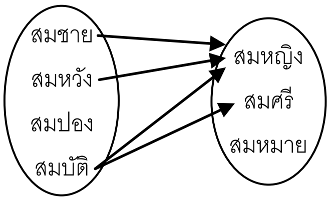
4. กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{a, b\}$ คู่อันดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ [O-NET 52/12]
   1. $(2, b)$
   2. (b, a)
   3. $(a, 1)$
   4. $(1, 2)$

ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์ คือ ความเกี่ยวข้องกัน ระหว่างกลุ่มสองกลุ่ม

เช่น ความสัมพันธ์ “แอบชอบ” ระหว่าง กลุ่มผู้ชาย ซึ่งประกอบด้วย สมชาย สมหวัง สมปอง และ สมบัติ
ไปยัง กลุ่มผู้หญิง ซึ่งประกอบด้วย สมหญิง สมศรี และสมหมาย

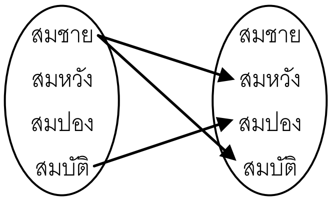
โดย สมชาย แอบชอบ สมหญิง
สมหวัง แอบชอบ สมหญิง
และ สมบัติ แอบชอบ สมศรีและสมหญิง



เราจะสามารถเขียนแผนภาพความสัมพันธ์ “แอบชอบ”
ระหว่างกลุ่มผู้ชาย ไปยังกลุ่มผู้หญิง ได้ดังรูป

สิ่งที่ต้องระวังคือ ความสัมพันธ์ส่วนใหญ่ “สลับที่ไม่ได้”
นั่นคือ การที่ สมชาย แอบชอบ สมหญิง ไม่ได้แปลว่า สมหญิง แอบชอบ สมชาย

และในบางกรณี กลุ่มหน้า กับ กลุ่มหลัง อาจเป็นกลุ่มเดียวกันได้ด้วย
เช่น ในการแข่งขันชกมวยแบบแบทเทิลรอยัล ในกลุ่มผู้ชาย
พบว่า สมชาย ชกโดน สมหวังและสมบัติ
และ สมบัติ ชกโดนสมปอง



จะสามารถเขียนแผนภาพได้กลุ่มหน้ากับกลุ่มหลังเป็นกลุ่มเดียวกัน ดังรูป
ในกรณีที่ กลุ่มหน้ากับกลุ่มหลังเป็นกลุ่มเดียวกัน เราจะเรียกว่า ความสัมพันธ์ “ในกลุ่ม”

ในเรื่องนี้ เรานิยมใช้สัญลักษณ์ r เป็นตัวแปรแทนความสัมพันธ์

เช่น ความสัมพันธ์ “แอบชอบ” จะแทนด้วย $r_{\text{แอบชอบ}}$
ความสัมพันธ์ “ชกโดน” จะแทนด้วย $r_{\text{ชกโดน}}$

นอกจากการวาดเป็นแผนภาพแล้ว เรายังสามารถใช้ “เซตของคู่อันดับ” มาช่วยเขียนความสัมพันธ์ได้ด้วย
โดย คู่อันดับ (x, y) จะมีความหมายว่า x สัมพันธ์กับ y

เช่น $r_{\text{แอบชอบ}} = \{$(สมชาย, สมหญิง), (สมหวัง, สมหญิง), (สมบัติ, สมหญิง), (สมบัติ, สมศรี)$\}$
$r_{\text{ชกโดน}} = \{$(สมชาย, สมหวัง), (สมชาย, สมบัติ), (สมบัติ, สมปอง)$\}$

โดยเราสมารถเขียนเซตเหล่านี้ “แบบบอกเงื่อนไข” ได้ด้วย

เช่น $r_{\text{แอบชอบ}} = \{(x, y) \mid x \text{ แอบชอบ } y\}$
$r_{\text{ชกโดน}} = \{(x, y) \mid x \text{ ชกโดน } y\}$

และ เราสามารถใช้ผลคูณคาร์ทีเซียน เพื่อช่วยบอกขอบเขตของความสัมพันธ์ได้ด้วย

เช่น $r_{\text{แอบชอบ}} = \{(x, y) \in \text{เซตของผู้ชาย} \times \text{เซตของผู้หญิง} \mid x \text{ แอบชอบ } y\}$

เอาเฉพาะ x ในกลุ่มผู้ชาย มาสัมพันธ์กับ y ในกลุ่มผู้หญิง

$r_{\text{ชกโดน}} = \{(x, y) \in$ เซตของผู้ชาย $\times$ เซตของผู้ชาย $\mid x$ ชกโดน $y\}$

เอาเฉพาะ x ในกลุ่มผู้ชาย มาสัมพันธ์กับ y ในกลุ่มผู้ชาย

อย่างไรก็ตาม ความสัมพันธ์ที่เราจะเจอในเรื่องนี้ ส่วนใหญ่จะเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลข

เช่น $r_{\text{ยกกำลังสอง}}$ ระหว่าง N ไปยัง R $= \{ (x, y) \in \mathrm{N} \times \mathrm{R} \mid x^2 = y \}$

$= \{ (1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots \}$

$r_{\text{มากกว่า}}$ ระหว่าง I ไปยัง N $= \{ (x, y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{N} \mid x > y \}$

$= \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), \dots \}$

$r_{\text{หารลงตัว}}$ ภายใน N $= \{ (x, y) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \mid x$ หาร y ลงตัว $\}$

$= \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots , (2, 2), (2, 4), (2, 6), \dots, (3, 3), (3, 6), (3, 9), \dots \}$

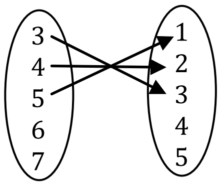
<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ "บวกกันได้ 6" ระหว่าง B ไปยัง A ทั้งแบบแจกแจงสมาชิก และแบบบอกเงื่อนไข

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ระวังให้ดี โจทย์ต้องการความสัมพันธ์ ระหว่าง B ไปยัง A ดังนั้น ต้องเอา B ขึ้นก่อน

จะเห็นว่า $3 + 3 = 6$

$4 + 2 = 6$

และ $5 + 1 = 6$



ดังนั้น เขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงได้เป็น $r = \{ (3, 3), (4, 2), (5,1) \}$

และ เขียนแบบบอกเงื่อนไขได้เป็น $r = \{ (x, y) \in \mathrm{B} \times \mathrm{A} \mid x + y = 6 \}$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, \dots , 10\}$, $B = \{2, 4, 6, \dots , 20\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ แบบแจกแจงสมาชิก
    1. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x\}$
    2. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x - 1\}$
    3. $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 3x\}$
    4. $r = \{(x, y) \in B \times B \mid y < x - 15\}$

5. $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y > 2x + 5\}$

6. $r = \{(x, y) \in B \times B \mid y = \frac{x}{3} + x\}$

7. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x - 5|\}$

8. $r = \{(x, y) \in B \times A \mid y = 6x - 1\}$

9. $r = \{(x, y) \in B \times A \mid x - y = -1\}$

2. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$

$S = \left\{(a, b) \in A \times B \,\middle|\, b = 2a + \frac{a}{2}\right\}$

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับเท่าไร [O-NET 51/7]

3. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $r = \{(m, n) \in A \times A \mid m \leq n\}$ แล้ว จำนวนสมาชิกในความสัมพันธ์ r เท่ากับเท่าไร [O-NET 50/9]

4. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 5\}$
ถ้า $r = \{\ (a, b) \in A \times B \mid a \geq b - 1\ \}$ แล้ว r มีจำนวนสมาชิกกี่ตัว [O-NET 57/33]

5. กำหนดให้ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A
ถ้า $r_1 = \{(-1,\ -2),\ (0,\ -1),\ (1,\ 2),\ (2,\ -3),\ (3,\ 4)\}$
และ $r_2 = \{(x,\ y) \mid |y + 1| = x\}$ แล้ว $n(r_1 \cap r_2)$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 49/2-10]

6. ขบวนพาเหรดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขบวนหนึ่ง ประกอบด้วยผู้เดินเป็นแถว แถวละเท่าๆกัน (มากกว่า 1 แถว และแถวละมากกว่า 1 คน) โดยมีเฉพาะผู้อยู่ริมด้านนอกทั้งสี่ด้านของขบวนเท่านั้น ที่สวมชุดสีแดง ซึ่งมีทั้งหมด 50 คน ถ้า x คือจำนวนแถวของขบวนพาเหรด และ N คือจำนวนคนที่อยู่ในขบวนพาเหรดแล้ว ข้อใดถูกต้อง [O-NET 53/15]

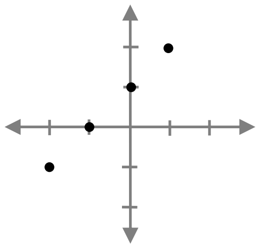
1. $31x - x^2 = N$
2. $29x - x^2 = N$
3. $27x - x^2 = N$
4. $25x - x^2 = N$

7. กัลยามีธุรกิจให้เช่าหนังสือ เธอพบว่า ถ้าคิดค่าเช่าหนังสือเล่มละ 10 บาท จะมีหนังสือถูกเช่าไป 100 เล่มต่อวัน แต่ถ้าเพิ่มค่าเช่าเป็น 11 บาท จำนวนหนังสือที่ถูกเช่าจะเป็น 98 เล่มต่อวัน และถ้าเพิ่มค่าเช่าเป็น 12 บาท จำนวนหนังสือที่ถูกเช่าจะเป็น 96 เล่มต่อวัน กล่าวคือ จำนวนหนังสือที่ถูกเช่าต่อวันจะลดลง 2 เล่มทุกๆ 1 บาทของค่าเช่าที่เพิ่มขึ้น ถ้า x คือจำนวนเงินส่วนที่เพิ่มขึ้นของค่าเช่าต่อเล่ม และ y คือรายได้จากค่าเช่าหนังสือต่อวัน (หน่วย : บาท) แล้ว จงหาสมการแสดงรายได้ต่อวันจากธุรกิจนี้ของกัลยา [O-NET 56/10]

กราฟของความสัมพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้เรียนวิธีในการเขียนความสัมพันธ์ ไป 3 วิธี
ซึ่งได้แก่ แผนภาพการจับคู่ , เซตแจกแจงคู่อันดับ , และ เซตแบบบอกเงื่อนไข
ในกรณีที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลข เรายังเขียนความสัมพันธ์โดยใช้ "กราฟ" บนระนาบ X-Y ได้ด้วย
โดยถ้า a สัมพันธ์กับ b ก็จะมีจุด (a, b) อยู่บนกราฟของความสัมพันธ์

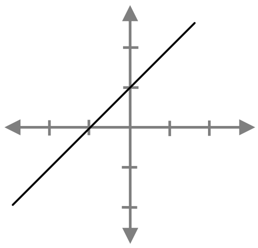
<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 1\}$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ $(x, y) \in A \times A$ ดังนั้น $x \in A$ และ $y \in A$ โดย x จะสัมพันธ์กับ y เมื่อ $y = x + 1$
ดังนั้น เขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น $r = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$
ซึ่งจะเขียนกราฟได้



#

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid y = x + 1\}$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้สมการเหมือนกับข้อที่แล้ว คือ $y = x + 1$ ต่างกันตรงที่คราวนี้ x กับ y เป็นอะไรก็ได้ใน R
นั่นคือ ข้อนี้ x กับ y เป็นเศษส่วน ทศนิยม ติดรูท ได้หมด ขอแค่ $y = x + 1$
ดังนั้น ข้อนี้จะมีจุดอื่นๆ ที่พิกัด x , y เป็นทศนิยม แทรกอยู่ระหว่าง 4 จุดจากข้อที่แล้ว
เช่น $(-2.9, -1.9)$, $(-2.8, -1.8)$, $(-2.75, -1.75)$, $(-2.722, -1.722)$, ...

ถ้านำจุดเหล่านี้ไปพล็อตกราฟ
จะเห็นว่าจุดจะเรียงเป็นตับ เกิดเป็น "เส้น"



ซึ่งจะได้กราฟของความสัมพันธ์ ดังรูป #

ในกรณีที่เป็นความสัมพันธ์ <u>ใน R</u> เราสามารถละ $\{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid \ldots\}$ ในฐานที่เข้าใจได้
เช่น ถ้าโจทย์พูดถึง "ความสัมพันธ์ $y = x + 1$" โดยไม่บอกขอบเขตอะไรมาให้
ก็ต้องรู้ ว่าหมายถึงความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid y = x + 1\}$

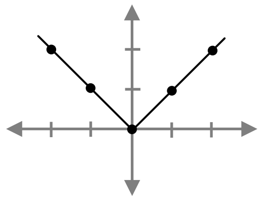
และในกรณีที่เป็นความสัมพันธ์ <u>ใน R</u> เรามักจะได้กราฟ "เป็นเส้น"
วิธีวาดกราฟ คือ ให้หาคู่อันดับที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์มาซักสามสี่ตัว เพื่อดูแนวโน้มของเส้นกราฟ
เมื่อได้แนวโน้มของกราฟแล้ว ค่อยลากเส้น

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $y = |x|$

วิธีทำ ข้อนี้ไม่บอกขอบเขตอะไรมาให้ ดังนั้น ขอบเขตคือ $(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ และจะได้กราฟ "เป็นเส้น"

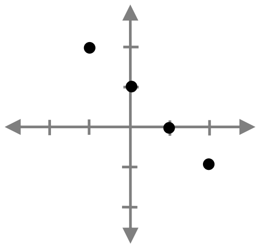
เราจะหาคู่อันดับที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ดังกล่าวมาซักสามสี่ตัว เพื่อดูแนวโน้มของกราฟ

จะได้ $r = \{ \dots, (-2, 2), (-1, 1), (0, 0),$
$(1, 1), (2, 2), \dots \}$

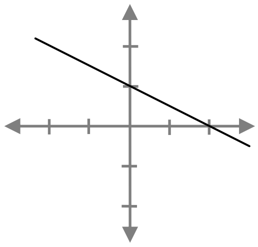


เมื่อได้แนวโน้มของกราฟ จึงค่อยลากเส้น #

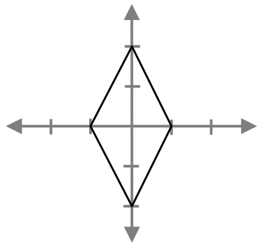
ทำนองกลับกัน ถ้าโจทย์ให้กราฟของความสัมพันธ์มา เราต้องอ่านการจับคู่ของความสัมพันธ์ได้ เช่น



$x = 2$ จับคู่กับ $y = -1$
$x = -1$ จับคู่กับ $y = 2$



$x = 0$ จับคู่กับ $y = 1$
$x = 2$ จับคู่กับ $y = 0$



$x = 0$ จับคู่กับ $y = 2, -2$
$x = 2$ ไม่ได้จับคู่กับ y ตัวไหนเลย

สังเกตว่า จุดที่กราฟอยู่เหนือ แกน X จะมีพิกัด $y > 0$

จุดที่กราฟ อยู่ใต้ แกน X จะมีพิกัด $y < 0$

จุดที่กราฟ ตัด แกน X จะมีพิกัด $y = 0$ จุดที่กราฟตัดแกน Y จะมีพิกัด $x = 0$

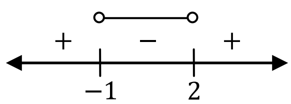
ตัวอย่าง จงหาจุดที่กราฟ $y = 2 + x - x^2$ ตัดแกน X พร้อมทั้งหาค่า x ที่กราฟอยู่เหนือแกน X

วิธีทำ จุดที่กราฟตัดแกน X จะมีค่า $y = 0$

$$0 = 2 + x - x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2, -1$$

จุดที่กราฟอยู่เหนือแกน X จะมีค่า $y > 0$

$$0 < 2 + x - x^2$$
$$x^2 - x - 2 < 0$$
$$(x-2)(x+1) < 0$$



$x \in (-1, 2)$

ดังนี้ กราฟจะตัดแกน X ที่ $(2, 0), (-1, 0)$ และจะอยู่เหนือแกน X เมื่อ $x \in (-1, 2)$ #

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่า กราฟในข้อใด ผ่านจุด $(-1, 1)$

   1. $3y = 1 - 2x$
   2. $y = x^2 + 1$

3. $x^2 + y^2 = 2$

4. $y = 2^x - 3$

2. จงหาจุดตัดแกน X และ จุดตัดแกน Y ของกราฟต่อไปนี้

1. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

2. $y = 2x + 1$

3. $y + 2 = |x + 1|$

4. $|y| - 2 = |x - 1|$

5. $y = x^2 - 1$

6. $y^2 = x - 1$

3. จงหาค่า x ที่กราฟอยู่เหนือแกน X

1. $y = 2x + 1$

2. $y = 2x^2 - x - 3$

4. จงหาค่า x ที่กราฟอยู่ใต้แกน X

1. $y = 4x^2 + 7x - 2$

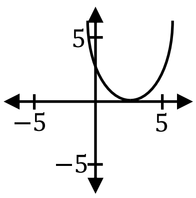
2. $2x + 3y = 6$

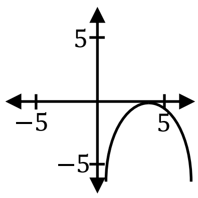
5. ค่าของ a ที่ทำให้กราฟของฟังก์ชัน $y = a(2^x)$ ผ่านจุด $(3, 16)$ คือเท่าไร [O-NET 52/16]

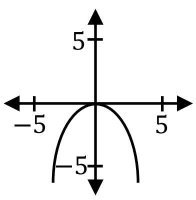
6. กราฟของฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้ ตัดแกน X มากกว่า 1 จุด [O-NET 50/24]
   1. $y = 1 + x^2$
   2. $y = |x| - 2$
   3. $y = |x - 1|$
   4. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

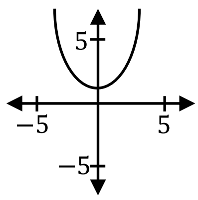
7. ทุก x ในช่วงใดต่อไปนี้ที่กราฟของสมการ $y = -4x^2 - 5x + 6$ อยู่เหนือแกน X [O-NET 51/8]
   1. $\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$
   2. $\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$
   3. $\left(\frac{1}{4},\ \frac{6}{7}\right)$
   4. $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

8. เมื่อเขียนกราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a \neq 0$ เพื่อหาคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ กราฟในข้อใดต่อไปนี้แสดงว่าสมการไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง [O-NET 52/22]

1. 

2. 

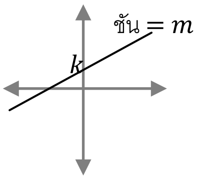
3. 

4. 

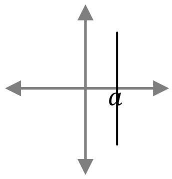
รูปกราฟที่ควรจำ

กราฟเส้นตรง

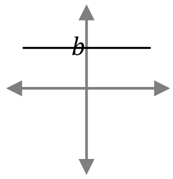
$y = mx + k$



$x = a$

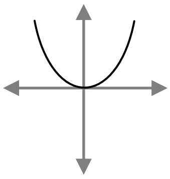


$y = b$

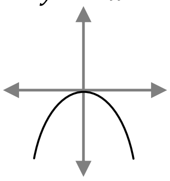


กราฟพาราโบลา

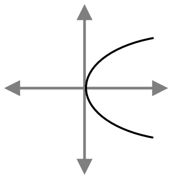
$y = x^2$



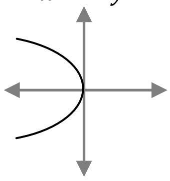
$y = -x^2$



$x = y^2$

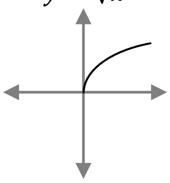


$x = -y^2$

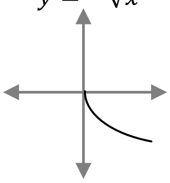


กราฟรูท

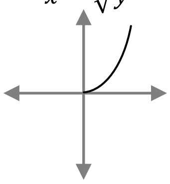
$y = \sqrt{x}$



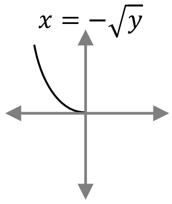
$y = -\sqrt{x}$



$x = \sqrt{y}$

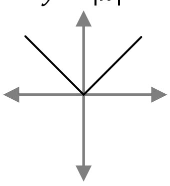


$x = -\sqrt{y}$

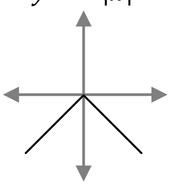


กราฟค่าสัมบูรณ์

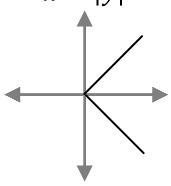
$y = |x|$



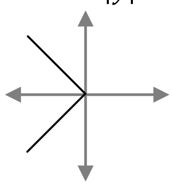
$y = -|x|$



$x = |y|$

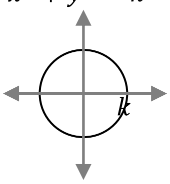


$x = -|y|$

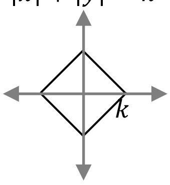


กราฟอื่นๆ

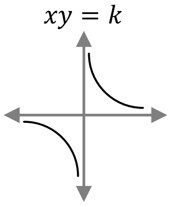
$x^2 + y^2 = k^2$



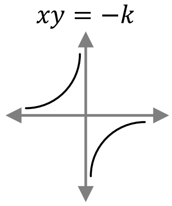
$|x| + |y| = k$



$xy = k$



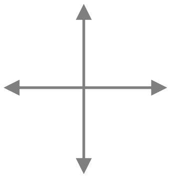
$xy = -k$



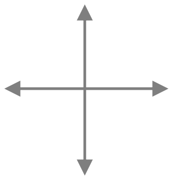
<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงวาดกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

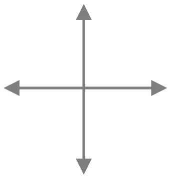
1. $x = -2$



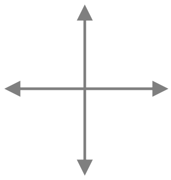
2. $y = |x|$



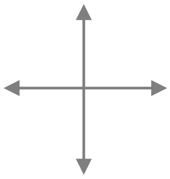
3. $y = x^2$



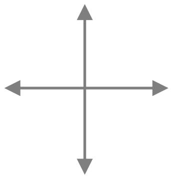
4. $y = \sqrt{x}$



5. $x^2 + y^2 = 4$



6. $|x| + |y| = 4$



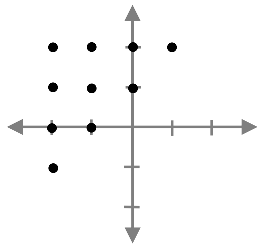
กราฟของอสมการ

หัวข้อนี้ จะพูดถึงกรณีที่มีเครื่องหมาย $>$ หรือ $<$ ในเงื่อนไขของความสัมพันธ์

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y \geq x + 1\}$

<u>วิธีทำ</u> เขียน r แบบแจกแจงสมาชิก ได้ $r = \{\, (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1),$
$(-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2) \,\}$

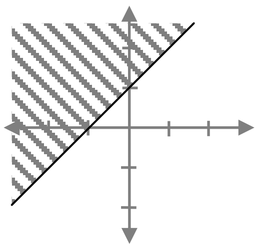
ซึ่งจะนำมาเขียนกราฟได้ดังรูป



#

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid y \geq x + 1\}$

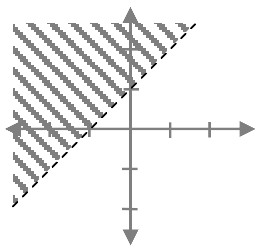
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ อสมการเหมือนกับข้อที่แล้ว คือ $y \geq x + 1$ ต่างกันตรงที่คราวนี้ x กับ y เป็นอะไรก็ได้ใน R
นั่นคือ ข้อนี้ x กับ y เป็นเศษส่วน ทศนิยม ติดรูท ได้หมด ขอแค่ $y \geq x + 1$
ดังนั้น ข้อนี้จะมีจุดอื่นๆ ที่พิกัด x , y เป็นทศนิยม แทรกอยู่ระหว่างจุดจากข้อที่แล้ว
เช่น $(-1.9, -1.2)$, $(-0.8, 0.5)$, $(1.75, 2.53)$, $(2.722, 4.722)$, ...
ถ้านำจุดเหล่านี้ไปพล็อตกราฟ
จะเห็นว่าจุดจะเรียงเป็นตับ เกิดเป็น “พื้นที่”



ซึ่งจะได้กราฟของความสัมพันธ์ ดังรูป #

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid y > x + 1\}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้คล้ายข้อที่แล้ว เพียงแต่คราวนี้ เปลี่ยน $\geq$ เป็น $>$
กราฟที่ได้ ก็จะคล้ายข้อที่แล้ว แต่หักจุดที่ $y = x + 1$ ออก
ซึ่งจุดที่ทำให้ $y = x + 1$ ก็คือจุดตรงบริเวณเส้นแบ่งเขตนั่นเอง



เราจะใช้ “เส้นประ” เพื่อบ่งบอกว่า “ไม่เอา” จุดบริเวณเส้นแบ่งเขต ดังรูป #

วิธีวาดกราฟของความสัมพันธ์ที่มีเงื่อนไขเป็น “อสมการ” จะมีหลักดังนี้

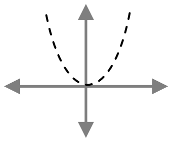
1. วาดเส้นกราฟด้วยวิธีเดิมแบบสมการ ออกมาก่อน
    - ถ้าเป็น $>$ หรือ $<$ ให้วาดเส้นกราฟด้วยเส้นประ
    - ถ้าเป็น $\geq$ หรือ $\leq$ ให้วาดเส้นกราฟด้วยเส้นทึบ

2. กราฟที่ได้ จะแบ่งระนาบ X-Y ออกเป็นส่วนๆ สุ่มจุดไหนก็ได้มาแทนในอสมการ ถ้าจุดจากส่วนไหนแทนแล้วอสมการเป็นจริง ให้แรเงาส่วนนั้น

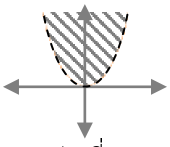
<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $y < x^2$

<u>วิธีทำ</u> ขั้นแรก เขียนกราฟ $y = x^2$ ก่อน

เนื่องจากข้อนี้เป็นเครื่องหมาย $<$ จึงต้องเขียนด้วยเส้นประ

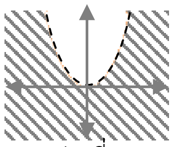


จะเห็นว่า กราฟแบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วน คือ



ส่วนที่ 1

กับ



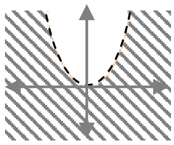
ส่วนที่ 2

จากนั้น สุ่มจุดไหนก็ได้จากแต่ละส่วน มาแทน

ส่วนที่ 1: สุ่มจุด $(0, 1)$ มาแทนในอสมการ ได้ $1 < 0^2$ ซึ่งเป็นเท็จ ดังนั้น ไม่แรเงา ส่วนที่ 1

ส่วนที่ 2: สุ่มจุด $(1, 0)$ มาแทนในอสมการ ได้ $0 < 1^2$ ซึ่งเป็นจริง ดังนั้น แรเงา ส่วนที่ 2

ดังนั้น กราฟของความสัมพันธ์ $y < x^2$ คือ



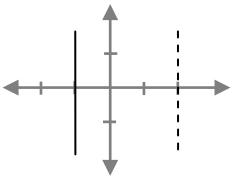
#

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $-1 \leq x < 2$

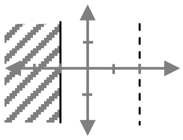
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เป็นอสมการแบบ 3 ท่อน เราจะซอยมันเป็นอสมการย่อย 2 อัน คือ $-1 \leq x$ กับ $x < 2$

$-1 \leq x$ ต้องเขียนด้วยเส้นทึบ

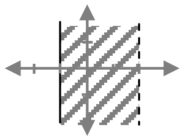
$x < 2$ ต้องเขียนด้วยเส้นประ



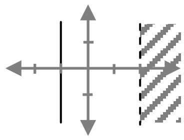
จะเห็นว่า กราฟแบ่งพื้นที่ออกเป็น 3 ส่วน คือ



ส่วนที่ 1



ส่วนที่ 2



ส่วนที่ 3

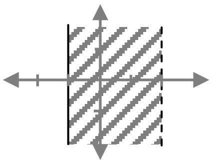
จากนั้น สุ่มจุดไหนก็ได้จากแต่ละส่วน มาแทน

ส่วนที่ 1: สุ่มจุด $(-2, 0)$ มาแทนในอสมการ ได้ $-1 \leq -2 < 2$ ซึ่งไม่จริง ดังนั้น ไม่เอา ส่วนที่ 1

ส่วนที่ 2: สุ่มจุด $(0, 0)$ มาแทนในอสมการ ได้ $-1 \leq 0 < 2$ ซึ่ง จริง ดังนั้น เอา ส่วนที่ 2

ส่วนที่ 3: สุ่มจุด $(3, 0)$ มาแทนในอสมการ ได้ $-1 \leq 3 < 2$ ซึ่งไม่จริง ดังนั้น ไม่เอา ส่วนที่ 3

ดังนั้น กราฟของความสัมพันธ์ $-1 \leq x < 2$ คือ



#

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงวาดกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $y > x$

2. $x + y \leq 2$

3. $y \geq x^2$

4. $x^2 + y^2 < 4$

5. $y > |x|$

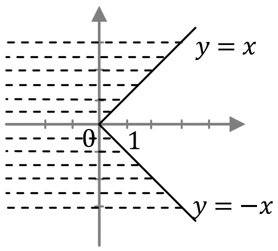
6. $|y| \leq x$

7. $-1 < x < 2$

8. $1 < y \leq 2$

9. $-2 \leq x + y \leq 2$

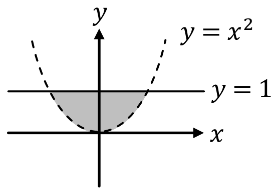
2. ข้อใดต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นบริเวณที่แรเงา [O-NET 54/9]



1. $\{ (x, y) \mid |y| \geq x \}$
2. $\{ (x, y) \mid |y| \leq x \}$
3. $\{ (x, y) \mid y \geq |x| \}$
4. $\{ (x, y) \mid y \leq |x| \}$

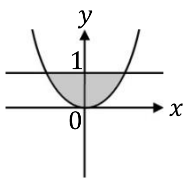
3. ถ้า $A = \{ (x, y) \mid |x + 1| \leq y$ และ $y \leq 2 \}$ แล้ว พื้นที่ของบริเวณ A เท่ากับกี่ตารางหน่วย [O-NET 57/34]

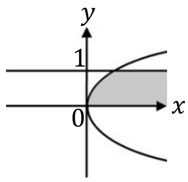
4. บริเวณที่แรเงาเป็นกราฟของความสัมพันธ์ในข้อใด [O-NET 57/12]

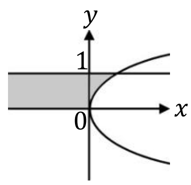


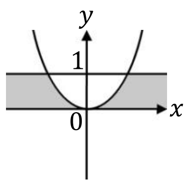
1. $\{ (x, y) \mid x^2 - y < 0$ และ $y \leq 1 \}$
2. $\{ (x, y) \mid x^2 - y < 0$ และ $y \geq 1 \}$
3. $\{ (x, y) \mid x^2 - y \geq 0$ และ $y < 1 \}$
4. $\{ (x, y) \mid x^2 - y \geq 0$ และ $y > 1 \}$
5. $\{ (x, y) \mid x^2 - y > 0$ และ $y \leq 1 \}$

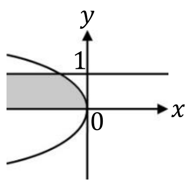
5. บริเวณที่แรเงาในข้อใดเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{ (x, y) \mid x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1 \}$ [O-NET 56/13]

1. 

2. 

3. 

4. 

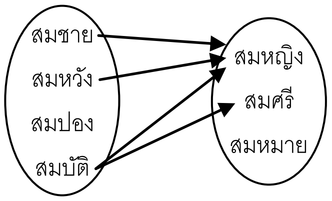
5. 

โดเมน และ เรนจ์

"โดเมน" ของความสัมพันธ์ r แทนด้วยสัญลักษณ์ D_r หมายถึง เซตกลุ่มตัวหน้า "เฉพาะตัวที่ได้โยง"

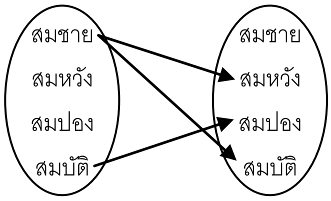
"เรนจ์" ของความสัมพันธ์ r แทนด้วยสัญลักษณ์ R_r หมายถึง เซตกลุ่มตัวหลัง "เฉพาะตัวที่ถูกโยง"

เช่น ถ้าย้อนกลับไปดูความสัมพันธ์ $r_{\text{แอบชอบ}}$ กับ $r_{\text{ชกโดน}}$ ในหัวข้อก่อนหน้า จะได้โดเมน และ เรนจ์ ดังนี้



$\mathrm{D}_r = \{$ สมชาย , สมหวัง , สมบัติ $\}$

$\mathrm{R}_r = \{$ สมหญิง , สมศรี $\}$



$\mathrm{D}_r = \{$ สมชาย , สมบัติ $\}$

$\mathrm{R}_r = \{$ สมหวัง , สมปอง , สมบัติ $\}$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $r = \{\, (x, y) \in A \times A \mid y = |x| \,\}$ จงหา D_r และ R_r

<u>วิธีทำ</u> จะเขียน r เป็นแผนภาพก็ได้ หรือจะเขียนแบบแจกแจงสมาชิกก็ได้

ถ้าเขียนความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก จะได้ $r = \{\, (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2) \,\}$

ดังนั้น $\mathrm{D}_r = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = A$

$\mathrm{R}_r = \{\, 0, 1, 2\}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $r = \{\, (x, y) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \mid y = 3x + 2 \,\}$ จงหา D_r และ R_r

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่น ต้องรู้ว่า N คือ จำนวนนับ (ซึ่งก็คือ จำนวนเต็มบวกนั่นเอง)

เขียนความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก จะได้ $r = \{\, (1, 5), (2, 8), (3, 11), \ldots \}$

ดังนั้น $\mathrm{D}_r = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathrm{N}$

$\mathrm{R}_r = \{5, 8, 11, \ldots\}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $r = \{\, (x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid y = 2x \,\}$ จงหา D_r และ R_r

<u>วิธีทำ</u> R คือ จำนวนจริง ดังนั้น x กับ y เป็นได้หมด ไม่ว่าจะเป็น เศษส่วน ทศนิยม ติดรูท

ตัวอย่างคู่อันดับที่อยู่ใน r เช่น $(0, 0)$, $(2,4)$, $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $(\frac{3}{2}, 3)$, $(-\frac{7}{2}, -7)$

จะเห็นว่า x กับ y เป็นอะไรก็ได้ เราหาคู่ให้ทุกตัว ได้เสมอ

ดังนั้น $\mathrm{D}_r = \mathrm{R}$ และ $\mathrm{R}_r = \mathrm{R}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $r = \{\, (x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid y = x^2 \,\}$ จงหา D_r และ R_r

<u>วิธีทำ</u> ตัวอย่างคู่อันดับที่อยู่ใน r เช่น $(1, 1)$, $(-3, 9)$, $(\sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{3}, 3)$

จะเห็นว่า x เป็นอะไรก็ได้ เราเอา x มายกกำลังสองก็จะได้ค่า y ที่เป็นคู่ให้มันโยงได้

แต่ y เป็นเลขติดลบไม่ได้ เพราะ ไม่มี x ไหนเลย ที่จะยกกำลังสองแล้วติดลบ

ดังนั้น $\mathrm{D}_r = \mathrm{R}$ และ $\mathrm{R}_r = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$ #

ในกรณีที่ขอบเขตเป็น $R \times R$ เรามีขั้นตอนในการหาโดเมน และ เรนจ์ ดังนี้

ขั้นที่ 1: จัดรูปสมการ ถ้าจะหาโดเมน ต้องจัดรูปสมการ แยก y ทิ้งไปอีกฝั่ง

ถ้าจะหาเรนจ์ ต้องจัดรูปสมการ แยก x ทิ้งไปอีกฝั่ง

สมการส่วนใหญ่ที่โจทย์ให้ จะมี y แยกทิ้งไปอีกฝั่งอยู่แล้ว ถ้าจะหาโดเมนก็ไม่ต้องจัดรูป

เช่น $y = x + 1$, $y = \frac{2x+1}{x-2}$, $y = \sqrt{x+2}$ จะเป็นรูปที่หาโดเมนได้เลย

แต่ถ้าจะหาเรนจ์ เรามักต้องออกแรงแยก x ทิ้งไปอีกฝั่ง

เช่น

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ y - 1 &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-2} \\ xy - 2y &= 2x + 1 \\ xy - 2x &= 2y + 1 \\ x(y-2) &= 2y + 1 \\ x &= \frac{2y+1}{y-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+2} \\ y^2 &= x + 2 \qquad ; y \geq 0 \\ y^2 - 2 &= x \end{aligned}$$

เวลาจัดรูป ให้ระวังเครื่องหมายบวกลบให้ดี เนื่องจาก $\sqrt{}$ ติดลบไม่ได้

โดยเฉพาะตอนที่ยกกำลังสองทั้งสองข้าง หรือ ถอดรูททั้งสองข้าง เช่น

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2+1} \\ y^2 &= x^2 + 1 \qquad ; y \geq 0 \end{aligned}$$

ต้องเขียน เพราะก่อนยก

y เป็นลบไม่ได้

ถอดรูททั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 - 1 \\ x &= \pm\sqrt{y^2-1} \end{aligned}$$

ต้องมี $\pm$ เพราะก่อนถอด

x เป็นได้ทั้งบวกและลบ

ขั้นที่ 2: หาว่า x กับ y เป็นอะไรได้บ้าง → ส่วน หรือ ตัวหาร ห้ามเป็นศูนย์

→ ข้างใน $\sqrt{}$ ห้ามติดลบ

เช่น $y = \frac{5x}{x-3}$ → $x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$ → $D_r = R - \{3\}$

$x = \sqrt{y+2}$ → $y + 2 \geq 0$

$y \geq -2$ → $R_r = [-2, \infty)$

$x = \frac{3y}{\sqrt{y+2}}$ → $y + 2 > 0$

$y > -2$ → $R_r = (-2, \infty)$

การตอบคำถามในเรื่องโดเมนและเรนจ์ มักจะต้องใช้สัญลักษณ์จากเรื่องเซต และช่วง อยู่บ่อยๆ

เช่น $R - \{2, 3\}$ → จำนวนจริงทุกตัว ยกเว้น 2 กับ 3

$R^+ \cup \{0\}$ → จำนวนจริงบวกทุกตัว รวม 0 ด้วย

$[2, 5]$ → ทุกจำนวน ตั้งแต่ 2 ถึง 5 (รวม 2 กับ 5 ด้วย)

$[2, 5)$ → ทุกจำนวน ตั้งแต่ 2 ถึง 5 (รวม 2 แต่ไม่รวม 5)

$(2, 5]$ → ทุกจำนวน ตั้งแต่ 2 ถึง 5 (ไม่รวม 2 แต่รวม 5)

$(2, 5)$ $\rightarrow$ ทุกจำนวน ระหว่าง 2 กับ 5 (ไม่รวม 2 ไม่รวม 5)

$(-\infty, 1]$ $\rightarrow$ ทุกจำนวน ที่ ≤ 1 $\qquad$ $[1, \infty)$ $\rightarrow$ ทุกจำนวน ที่ ≥ 1

$(-\infty, 1)$ $\rightarrow$ ทุกจำนวน ที่ < 1 $\qquad$ $(1, \infty)$ $\rightarrow$ ทุกจำนวน ที่ >1

$(-\infty, 2) \cup [5, \infty)$ $\rightarrow$ ทุกจำนวน ที่ < 2 หรือ ≥ 5

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์ $y = \frac{3x+1}{2x-1}$

<u>วิธีทำ</u> สมการที่ให้มา แยก y ทิ้งไปอีกฝั่งอยู่แล้ว ดังนั้น หาโดเมนได้เลย

เนื่องจากตัวหารห้ามเป็นศูนย์ ดังนั้น $2x - 1 \neq 0$

$x \neq \frac{1}{2}$ $\qquad$ จะได้ $\mathrm{D}_r = \mathrm{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

หาเรนจ์ ต้องจัดรูปสมการ แยก x ทิ้งไปอีกฝั่งก่อน

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+1}{2x-1} \\ 2xy - y &= 3x + 1 \\ 2xy - 3x &= y + 1 \\ x(2y-3) &= y + 1 \\ x &= \frac{y+1}{2y-3} \end{aligned}$$

เนื่องจากตัวส่วนห้ามเป็นศูนย์ ดังนั้น $2y - 3 \neq 0$

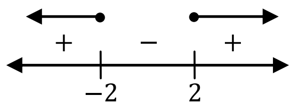
$y \neq \frac{3}{2}$ $\qquad$ จะได้ $\mathrm{R}_r = \mathrm{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์ $x = \sqrt{y^2 - 4}$

<u>วิธีทำ</u> สมการที่โจทย์ให้ อยู่ในรูปที่หา เรนจ์ ได้เลย

เนื่องจากข้างใน $\sqrt{\ }$ ห้ามติดลบ ดังนั้น

$$\begin{aligned} y^2 - 4 &\geq 0 \\ (y-2)(y+2) &\geq 0 \end{aligned}$$



จะได้ $\mathrm{R}_r = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

ถัดมา หาโดเมน ต้องจัดรูปใหม่ แยก y ทิ้งไปอีกฝั่ง

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y^2 - 4} \\ x^2 &= y^2 - 4 \qquad ; x \geq 0 \\ x^2 + 4 &= y^2 \\ \pm\sqrt{x^2 + 4} &= y \end{aligned}$$

ใน $\sqrt{\ }$ ห้ามติดลบ ดังนั้น $x^2 + 4 \geq 0$ และ $x \geq 0$

(จริงเสมอ)

$x \in \mathrm{R}$

จะได้ $\mathrm{D}_r = [0, \infty)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์ $y = x^2 - 6x + 5$

<u>วิธีทำ</u> สมการที่โจทย์ให้ อยู่ในรูปที่หาโดเมนได้เลย

จะเห็นว่าข้อนี้ x ไม่เป็นตัวหาร และ ไม่อยู่ใน $\sqrt{\ }$ ดังนั้น x เป็นได้ทุกอย่าง จะได้ $\mathrm{D}_r = \mathrm{R}$

ถัดมา หาเรนจ์ ต้องจัดรูป แยก x ทิ้งไปอีกฝั่ง

ข้อนี้ จัดรูปยากหน่อย เพราะมีทั้ง x กำลังสอง และ x กำลังหนึ่ง

เราต้องใช้กำลังสองสมบูรณ์ มารวบ x^2 กับ $4x$ เข้าด้วยกัน ให้เหลือ x เดียวก่อน ดังนี้

$$\text{น}^2 \pm 2\text{นล} + \text{ล}^2 = (\text{น} \pm \text{ล})^2$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 5 \\ y &= x^2 - 2(x)(3) + 3^2 - 3^2 + 5 \\ y &= (x-3)^2 - 4 \end{aligned}$$

จากนั้น จึงจัดรูป แยก x ทิ้งไปอีกฝั่ง ดังนี้

$$\begin{aligned} y + 4 &= (x-3)^2 \\ \pm\sqrt{y+4} &= x - 3 \\ \pm\sqrt{y+4} + 3 &= x \end{aligned}$$

เนื่องจากใน $\sqrt{\ }$ ห้ามติดลบ ดังนั้น $y + 4 \geq 0$

$y \geq -4$ จะได้ $\mathrm{R}_r = [-4, \infty)$ #

แบบฝึกหัด

1. จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $y = \frac{x+1}{x}$

2. $y = \frac{2x+1}{3x-2}$

3. $x = \frac{2y+3}{2-y}$

4. $x(y-1) = 2$

5. $xy - 3x + y + 2 = 0$

6. $y = x^2 + 3$

7. $y = x^2 + 4x - 6$

8. $y = \sqrt{x} + 1$

9. $y = \sqrt{x^2 - 4}$

10. $y = \sqrt{1 - x^2}$

11. $y = -\sqrt{x}$

12. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

13. $y = \sqrt{4 - x^2} + 1$

14. $y = 2 - \sqrt{x^2 - 1}$

2. จงหาโดเมนของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

2. $y = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$

3. $y = \sqrt{\frac{(x+1)(2-x)}{(x+3)}}$

โดเมนและเรนจ์ จากการพิจารณาช่วงค่า

อีกเทคนิคหนึ่งในการหา โดเมน หรือ เรนจ์ คือ การ "พิจารณาช่วงค่าที่เป็นไปได้" ของพจน์ต่างๆ ในสมการความสัมพันธ์

หลักของวิธีนี้ คือ 1. เริ่มจาก "พจน์กำลังสอง ≥ 0" หรือ "ค่าสัมบูรณ์ ≥ 0"

2. ค่อยๆปรับเติม ให้ได้เป็นพจน์ที่ปรากฏในสมการความสัมพันธ์

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์ $y = (x-3)^2 - 4$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า มีพจน์กำลังสอง คือ $(x-3)^2$ ดังนั้น เราจะใช้วิธีการพิจารณาช่วงค่าที่เป็นไปได้

โดยเริ่มจาก "พจน์กำลังสอง ≥ 0" แล้วปรับเติมจนได้เป็นพจน์ที่ปรากฏในสมการความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &\geq 0 && \text{ลบ 4 ทั้งสองข้าง} \\ (x-3)^2 - 4 &\geq -4 && \text{เพราะ } y = (x-3)^2 - 4 \\ y &\geq -4 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $y \geq -4$ ดังนั้น จะได้ $\mathrm{R}_r = [-4, \infty)$

สำหรับโดเมน เนื่องจากสมการที่โจทย์ให้ อยู่ในรูปพร้อมหาโดเมนแล้ว

เนื่องจาก x ไม่เป็นตัวหาร และ ไม่อยู่ใน $\sqrt{\ }$ ดังนั้น $\mathrm{D}_r = \mathrm{R}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์ $y = 2 - |x+5|$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า มีพจน์ค่าสัมบูรณ์ คือ $|x+5|$ ดังนั้น เราจะใช้วิธีการพิจารณาช่วงค่าที่เป็นไปได้

โดยเริ่มจาก

$$\begin{aligned} |x+5| &\geq 0 && \text{คูณ } -1 \text{ ทั้งสองข้าง} \\ -|x+5| &\leq 0 && \text{บวก 2 ทั้งสองข้าง} \\ 2 - |x+5| &\leq 2 && \text{เพราะ } y = 2 - |x+5| \\ y &\leq 2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $y \leq 2$ ดังนั้น จะได้ $\mathrm{R}_r = [-\infty, 2)$

สำหรับโดเมน เนื่องจากสมการที่โจทย์ให้ อยู่ในรูปพร้อมหาโดเมนแล้ว

เนื่องจาก x ไม่เป็นตัวหาร และ ไม่อยู่ใน $\sqrt{\ }$ ดังนั้น $\mathrm{D}_r = \mathrm{R}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์ $|x-2|+|y|=5$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ มีทั้ง $|x-2|$ และ $|y|$ เราจะแยกทำทีละตัว

$$\begin{aligned} |x-2| &\geq 0 && \text{บวก } |y| \text{ ทั้งสองข้าง} \\ |x-2|+|y| &\geq |y| && \text{เพราะ } |x-2|+|y|=5 \\ 5 &\geq |y| && \text{จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์} \\ -5 \leq y &\leq 5 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $-5 \leq y \leq 5$ ดังนั้น $\mathrm{R}_r = [-5, 5]$

$$\begin{aligned} |y| &\geq 0 && \text{บวก } |x-2| \text{ ทั้งสองข้าง} \\ |x-2|+|y| &\geq |x-2| && \text{เพราะ } |x-2|+|y|=5 \\ 5 &\geq |x-2| && \text{จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์} \\ -5 \leq x-2 &\leq 5 && \text{บวก 2 ตลอด} \\ -3 \leq x &\leq 7 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $-3 \leq x \leq 7$ ดังนั้น $\mathrm{D}_r = [-3, 7]$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

   1. $x=(y+2)^2+5$
   2. $y=3-(2-x)^2$
   3. $y=|x+5|-2$
   4. $|x+3|=y-1$

5. $y = -1 - |3 - x|$

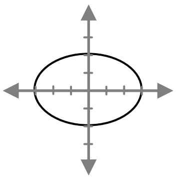
6. $|y| + |1 - x| = 1$

7. $|y| - |1 - x| = 1$

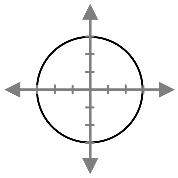
โดเมนและเรนจ์ จากกราฟ

ในกรณีที่โจทย์ให้ความสัมพันธ์มาในรูปกราฟ เราจะมีวิธีหาโดเมนและเรนจ์ได้ง่ายๆ
โดยดูว่ากราฟที่ให้ คลุมแกน X (โดเมน) และ แกน Y (เรนจ์) ในช่วงบริเวณใดบ้าง

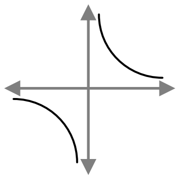
ถ้าบนเส้นกราฟมีวงกลมโบ๋ๆ (○) หมายความว่า "ไม่มี" จุดนั้นอยู่บนกราฟ
แต่ถ้าบนกราฟมีวงกลมทึบๆ (●) หมายความว่า "มี" จุดนั้นอยู่บนกราฟ



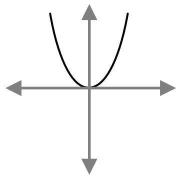
$D_r = [-3, 3]$
$R_r = [-2, 2]$



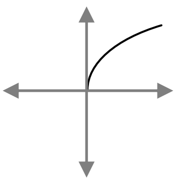
$D_r = [-3, 3]$
$R_r = [-3, 3]$



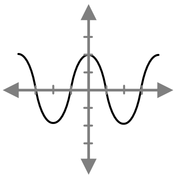
$D_r = R - \{0\}$
$R_r = R - \{0\}$



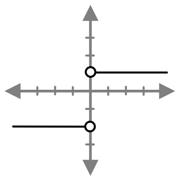
$D_r = R$
$R_r = [0, \infty)$



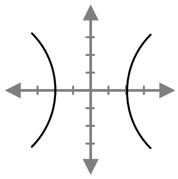
$D_r = [0, \infty)$
$R_r = [0, \infty)$



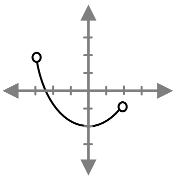
$D_r = R$
$R_r = [-2, 2]$



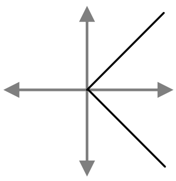
$D_r = R - \{0\}$
$R_r = \{-2, 1\}$



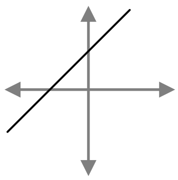
$D_r = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
$R_r = R$



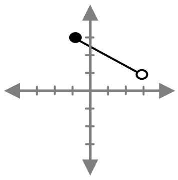
$D_r = (-3, 2)$
$R_r = [-2, 2)$



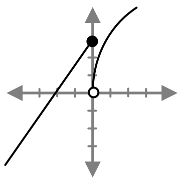
$D_r = [0, \infty)$
$R_r = R$



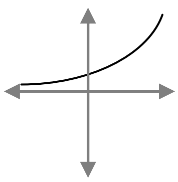
$D_r = R$
$R_r = R$



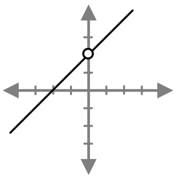
$D_r = [-1, 3)$
$R_r = (1, 3]$



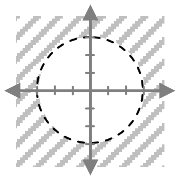
$D_r = R$
$R_r = R$



$D_r = R$
$R_r = (0, \infty)$



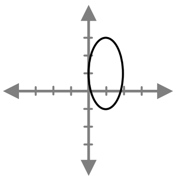
$D_r = R - \{0\}$
$R_r = R - \{2\}$

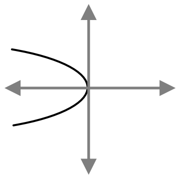


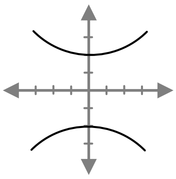
$D_r = R$
$R_r = R$

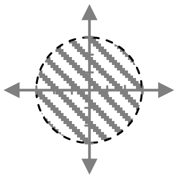
<u>แบบฝึกหัด</u>

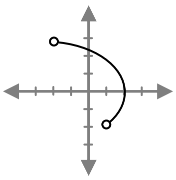
1. จงหาโดเมนและเรนจ์ ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

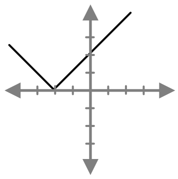
1. 

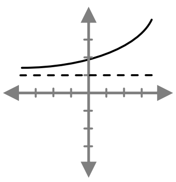
2. 

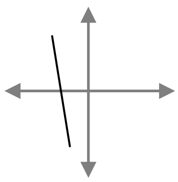
3. 

4. 

5. 

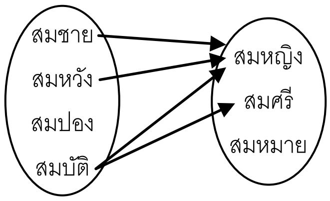
6. 

7. 

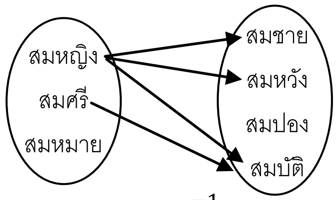
8. 

อินเวอร์ส

อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r แทนด้วยสัญลักษณ์ r^{-1} หมายถึง ความสัมพันธ์ที่ “โยงกลับทาง” กับ r
เช่น อินเวอร์สของ $r_{\text{แอบชอบ}}$ ก็คือความสัมพันธ์ “ถูกชอบ” ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ ${r_{\text{แอบชอบ}}}^{-1}$



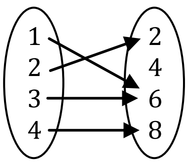
$r_{\text{แอบชอบ}}$



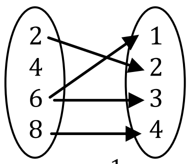
${r_{\text{แอบชอบ}}}^{-1}$

จะเห็นว่า โดเมน และ เรนจ์ ของ r^{-1} จะสลับกันกับ โดเมนและเรนจ์ของ r
กล่าวคือ $\mathrm{D}_r = \mathrm{R}_{r^{-1}}$ และ $\mathrm{R}_r = \mathrm{D}_{r^{-1}}$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $r = \{(1,6),(2,2),(3,6),(4,8)\}$ จงหา r^{-1}
<u>วิธีทำ</u> r^{-1} คือ ความสัมพันธ์ที่โยงกลับทางกันกับ r



r



r^{-1}

จะได้ $r^{-1} = \{(6,1),(2,2),(6,3),(8,4)\}$ #

จะเห็นว่า r^{-1} ก็คือการสลับ x กับ y ในคู่อันดับนั่นเอง
ดังนั้น ถ้าโจทย์ให้ r แบบบอกเงื่อนไข แล้วให้หา r^{-1} เราก็แค่สลับ x กับ y
เช่น $r = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x+1\}$
$r^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid y = 2x+1\}$ (อย่าลืมเปลี่ยน $A \times B$ เป็น $B \times A$ ด้วย)

ถ้าบางคนไม่ชอบสลับ x y ในคู่อันดับ จะไปสลับ x y ตรงเงื่อนไขก็ได้
เช่น $r^{-1} = \{(x,y) \in B \times A \mid x = 2y+1\}$
และถ้าจะให้สวย ควรจัดรูปสมการให้ y แยกไปอยู่ตัวเดียว

$$x = 2y+1$$
$$x-1 = 2y$$
$$\frac{x-1}{2} = y$$

จะได้ $r^{-1} = \{(x,y) \in B \times A \mid y = \frac{x-1}{2}\}$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R} \mid y = x^2+1\}$ จงหา r^{-1}
<u>วิธีทำ</u> จะสลับ x y ในคู่อันดับ แล้วตอบ $r^{-1} = \{(y,x) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^+ \mid y = x^2+1\}$ ก็ได้
แต่ไม่ค่อยเป็นที่นิยม เพราะ การใช้ตัวแปร y แทนพิกัดแกน X และใช้ตัวแปร x แทนพิกัดแกน Y จะทำให้สับสน
คนส่วนใหญ่ นิยมเปลี่ยน x y ตรงเงื่อนไข แล้วจัดรูปให้ y แยกไปอยู่ตัวเดียวมากกว่า

นั่นคือ $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^+ \mid x = y^2 + 1\}$

จัดรูปให้สวยงาม
$$\begin{aligned} x &= y^2 + 1 \\ x - 1 &= y^2 \\ \pm\sqrt{x-1} &= y \end{aligned}$$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^+ \mid y = \pm\sqrt{x-1}\}$ #

ตัวอย่าง จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ $y = \sqrt{x-2}$

วิธีทำ ข้อนี้ให้มาแต่สมการความสัมพันธ์ เราต้องรู้เองว่าโจทย์หมายถึง $r = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid y = \sqrt{x-2}\}$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid x = \sqrt{y-2}\}$

จัดรูปให้สวยงาม
$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y-2} \\ x^2 &= y - 2 \qquad ; x \geq 0 \\ x^2 + 2 &= y \end{aligned}$$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid y = x^2 + 2$ และ $x \geq 0\}$

หรือตอบสั้นๆ ว่า r^{-1} คือ $y = x^2 + 2$ โดยที่ $x \geq 0$ #

แบบฝึกหัด

1. จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้
   1. $r = \{(1, 4), (2, 2), (3, 2)\}$
   2. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$
   3. $r = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^+ \mid y = \frac{x+1}{2}\}$
   4. $y = \frac{2}{x+1}$
   5. $y = \frac{2x+1}{x-3}$
   6. $y = 2 - x$

7. $y = 2x^2 + 1$

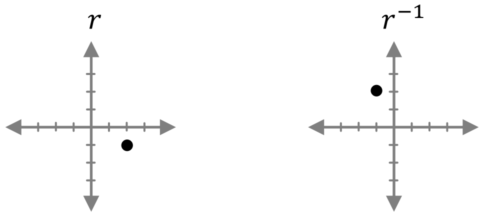
8. $y = \sqrt{2x + 1}$

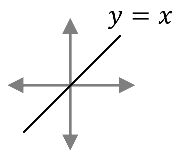
9. $x^2 + y^2 = 1$

10. $y = \sqrt{4 - x^2}$

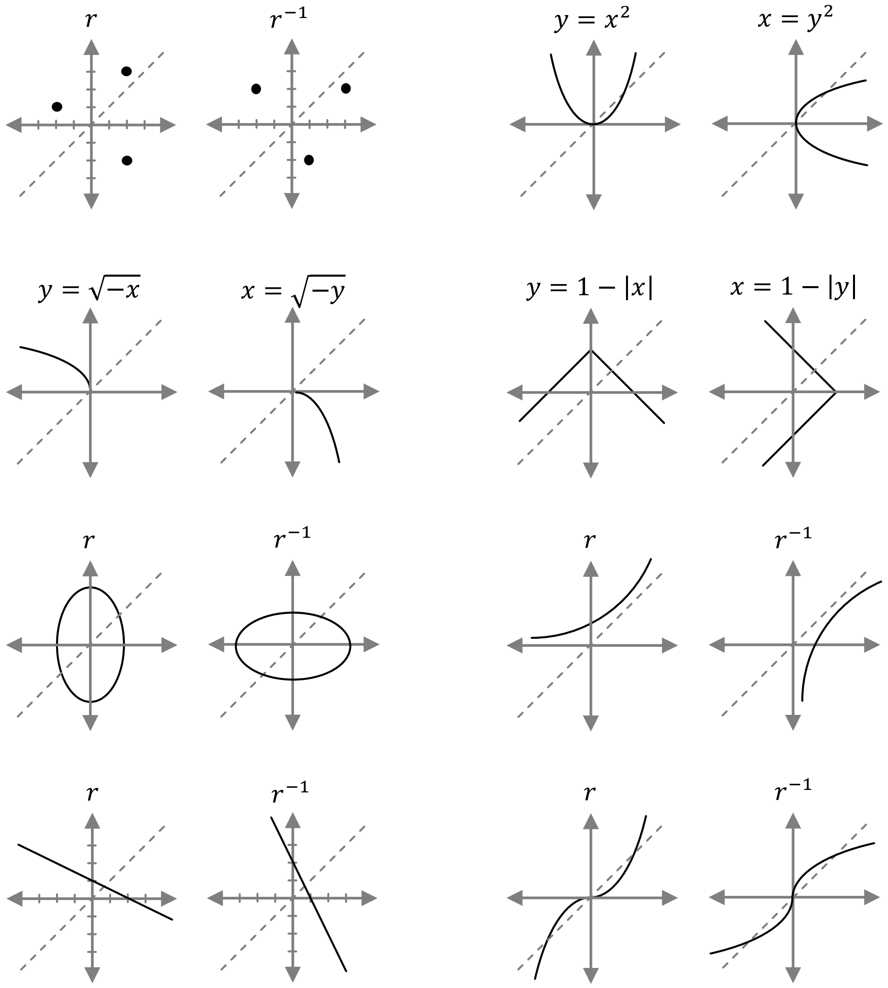
กราฟของอินเวอร์ส

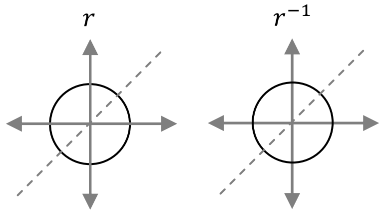
จากหัวข้อที่แล้ว อินเวอร์สของความสัมพันธ์ จะได้จากการสลับที่ x กับ y ในคู่อันดับ
เช่น คู่อันดับ $(2, -1)$ ใน r จะกลายเป็น $(-1, 2)$ ใน r^{-1} เป็นต้น

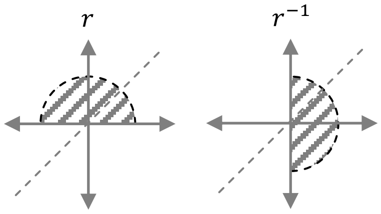


เนื่องจาก r กับ r^{-1} จะมี x กับ y สลับกัน
ดังนั้น กราฟของ r กับ r^{-1} จะสมมาตรกันตามแนว $45°$ (คือแนว ) เสมอ

ดังนั้น ถ้าให้กราฟของ r มา เราจะวาดกราฟของ r^{-1} ได้โดยการสะท้อน r ไปตามแนว $45°$
เช่น

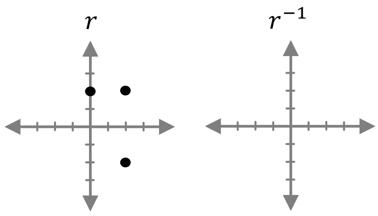


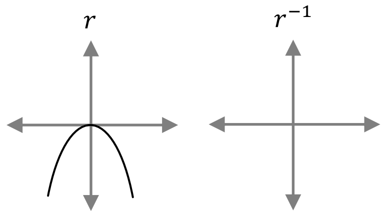


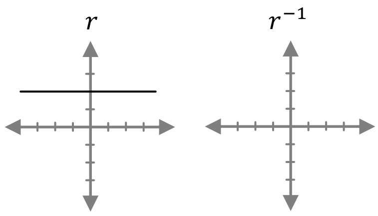


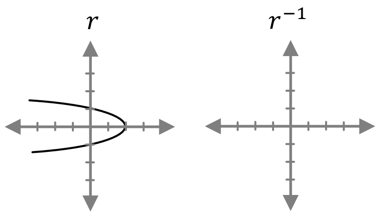
<u>แบบฝึกหัด</u>

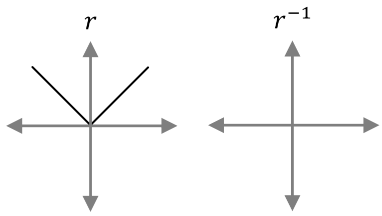
1. จงวาดกราฟอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

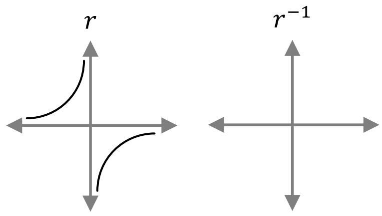
1.


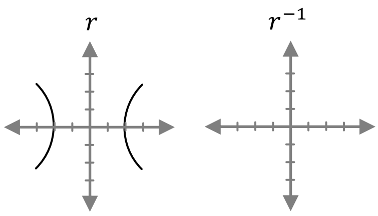
2.


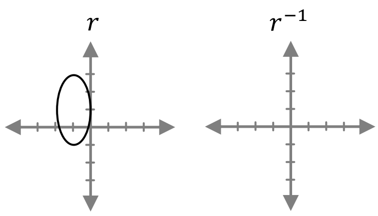
3.


4.


5.


6.


7.


8.


ฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่ " x แต่ละตัว <u>ห้าม</u> จับคู่กับ y เกิน 1 ตัว "

เช่น $r = \{(1,2),(2,4),(2,6),(3,8)\}$ → ไม่เป็นฟังก์ชัน

$r = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,7)\}$ → เป็นฟังก์ชัน

$r = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2)\}$ → เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ $y^2 = x$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ต้องคิด ว่ามี x ตัวไหนที่จับคู่กับ y หลายตัวไหม

จะเห็นว่า มี y^2 อยู่ในสมการความสัมพันธ์ ดังนั้น y เป็นบวก กับ y เป็นลบ จะยกกำลังสองได้เท่ากัน

เช่น $y = 1$ กับ $y = -1$ จะคำนวณค่า x ได้ 1

นั่นคือ มี $x = 1$ ที่จับคู่กับ $y = 1, -1$ ดังนั้น ความสัมพันธ์ $y^2 = x$ ไม่เป็นฟังก์ชัน #

ปกติแล้ว ในสมการความสัมพันธ์ ถ้า y ถูกยกกำลังคู่ หรือ อยู่ในเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ <u>มักจะ</u>ไม่ใช่ฟังก์ชัน เพราะ y เป็นบวก กับ y เป็นลบ จะคำนวณออกมาได้ค่าเท่ากัน ทำให้มี x หนึ่งค่า ที่คู่กับ y ได้สองตัว

เช่น

$x = (y+1)^2$ → ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ มี $(1,0)$ กับ $(1,-2)$ ในความสัมพันธ์

$y = x^2 + 2x + 5$ → เป็นฟังก์ชัน

$x^2 + y^2 = 4$ → ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ มี $(0,2)$ กับ $(0,-2)$ ในความสัมพันธ์

$4x = |y+1|$ → ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ มี $(1,3)$ กับ $(1,-5)$ ในความสัมพันธ์

$xy = 1$ → เป็นฟังก์ชัน

$y = x^3$ → เป็นฟังก์ชัน

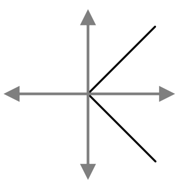
$x = 2y + 5$ → เป็นฟังก์ชัน

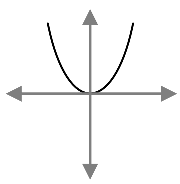
$|x| + |y| = 1$ → ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ มี $(0,1)$ กับ $(0,-1)$ ในความสัมพันธ์

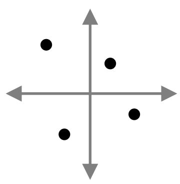
$(x-y)(x+y) = 1$ → ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจัดรูปได้เป็น $x^2 - y^2 = 1$
มี $(2,\sqrt{3})$ กับ $(2,-\sqrt{3})$ ในความสัมพันธ์

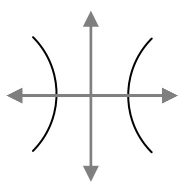
ในกรณีที่โจทย์ให้กราฟของความสัมพันธ์มา แล้วถามว่าความสัมพันธ์ดังกล่าว เป็นฟังก์ชันหรือไม่
วิธีดูง่ายๆคือ ถ้าสามารถลากเส้นดิ่ง ตัดกราฟได้มากกว่า 1 จุด แปลว่า<u>ไม่ใช่</u>ฟังก์ชัน
เพราะเส้นดิ่งที่ตัดกราฟหลายจุด แปลว่า มี x หนึ่งตัว ที่คู่กับ y หลายตัว

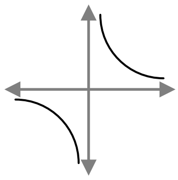
เช่น


ไม่เป็นฟังก์ชัน

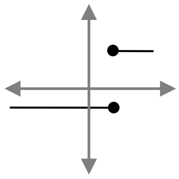

เป็นฟังก์ชัน


เป็นฟังก์ชัน

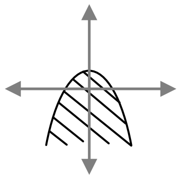

ไม่เป็นฟังก์ชัน



เป็นฟังก์ชัน



ไม่เป็นฟังก์ชัน



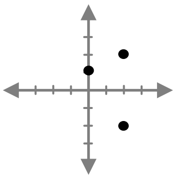
ไม่เป็นฟังก์ชัน

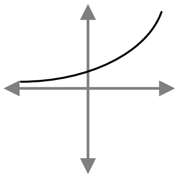
<u>แบบฝึกหัด</u>

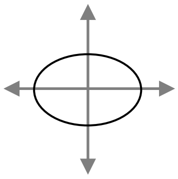
1. ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน
   1. $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$
   2. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
   3. $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
   4. $\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$
   5. $\{(1,0),(2,4),(3,1),(3,3)\}$

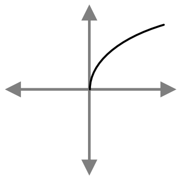
2. สมการความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน
   1. $y = 2x + 3$
   2. $y = 2x^2 + 3$
   3. $|x| + |y| = 1$
   4. $y = \sqrt{x}$
   5. $x = y^2 - 2y + 3$
   6. $x = y^2$
   7. $x = y^2$ และ $y \geq 0$
   8. $x^2 + y^2 = 1$
   9. $x^2 + y^2 = 1$ และ $x \geq 0$
   10. $x^2 + y^2 = 1$ และ $y \geq 0$
   11. $x^2 + y^2 = 1$ และ $xy > 0$

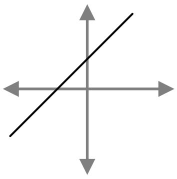
3. กราฟความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน

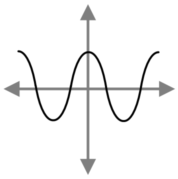
1. 

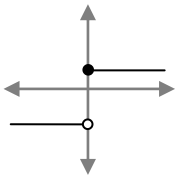
2. 

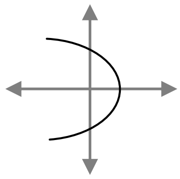
3. 

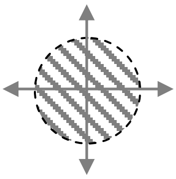
4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

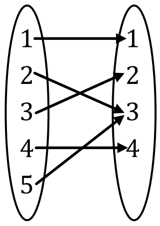
9. 

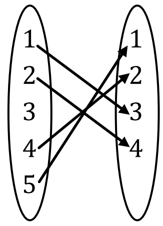
4. ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน [O-NET 54/8]
   1. $\{ (0, 1), (0, 2), (2, 1), (1, 3) \}$
   2. $\{ (0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 0) \}$
   3. $\{ (1, 1), (2, 0), (2, 3), (3, 1) \}$
   4. $\{ (1, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 2) \}$

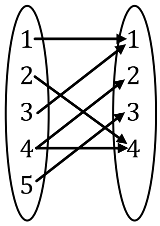
5. ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน [O-NET 53/11]
   1. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4)\}$
   2. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
   3. $\{(1, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 4)\}$
   4. $\{(1, 3), (2, 1), (3, 3), (4, 1)\}$

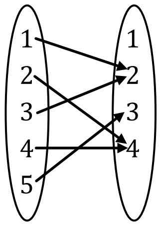
6. กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{0, 1\}$ ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A [O-NET 49/1-4]
   1. $\{(a, 1), (b, 0), (c, 1)\}$
   2. $\{(0, b), (1, a), (1, c)\}$
   3. $\{(b, 1), (c, 0)\}$
   4. $\{(0, c), (1, b)\}$

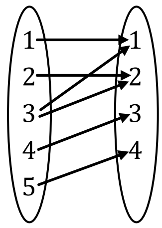
7. แผนภาพของความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชันที่มี $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ เป็นโดเมน และ $\{1, 2, 3, 4\}$ เป็นเรนจ์ [O-NET 56/12]

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

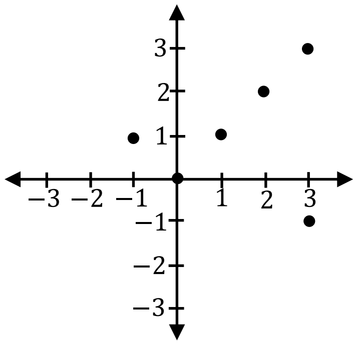
8. ให้ $A = \{1, 99\}$ ความสัมพันธ์ใน A ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน [O-NET 52/13]

1. เท่ากับ
2. ไม่เท่ากับ
3. หารลงตัว
4. หารไม่ลงตัว

9. กำหนดให้ $r = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B$ และ b หารด้วย a ลงตัว$\}$ ถ้า $A = \{2,\ 3,\ 5\}$ แล้ว ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน เมื่อ B เท่ากับเซตใดต่อไปนี้ [O-NET 50/22]

1. $\{3,\ 4,\ 10\}$
2. $\{2,\ 3,\ 15\}$
3. $\{0,\ 3,\ 10\}$
4. $\{4,\ 5,\ 9\}$

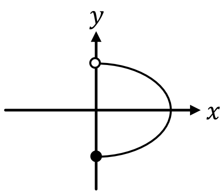
10. จากความสัมพันธ์ r ที่แสดงด้วยกราฟดังรูป

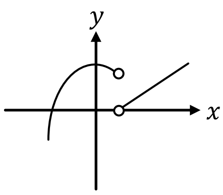


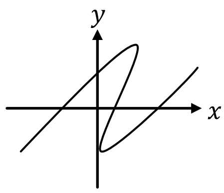
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [O-NET 52/14]

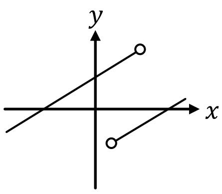
1. r เป็นฟังก์ชัน เพราะ $(1, 1)$, $(2, 2)$ และ $(3, 3)$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
2. r เป็นฟังก์ชัน เพราะมีจำนวนจุดเป็นจำนวนจำกัด
3. r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีจุด $(3, 3)$ และ $(3, -1)$ อยู่บนกราฟ
4. r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีจุด $(1, 1)$ และ $(-1, 1)$ อยู่บนกราฟ

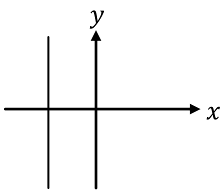
11. กราฟในข้อใดแสดงว่า y เป็นฟังก์ชันของ x [O-NET 57/13]

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

สัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน

ปกติ เรานิยมใช้ตัวแปร r แทนความสัมพันธ์

แต่ถ้าความสัมพันธ์ไหน เป็นฟังก์ชัน เราจะนิยมใช้ตัวแปร f , g , h แทน

เช่น $f=\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$, $g=\{(1,3),(2,3),(3,4)\}$, $h=\{(2,3),(5,6)\}$

นอกจากนี้ เรายังใช้สัญลักษณ์ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ แทน y ได้ด้วย

เช่น ฟังก์ชัน $y = 2x^2+1$ จะเขียนอีกแบบได้เป็น $f(x) = 2x^2+1$

และ $f(k)$ จะหมายถึง ค่า y เมื่อ $x=k$ เช่น $f(1)$ = ค่า y เมื่อ $x=1$

$f(0)$ = ค่า y เมื่อ $x=0$

$f(-2)$ = ค่า y เมื่อ $x=-2$ เป็นต้น

เช่น ถ้า $f=\{(-1,2),(0,5),(1,4),(2,-1),(3,6),(4,3)\}$

จะได้ $f(3) = 6$, $f(0) = 5$ และ $f(-1) = 2$ เป็นต้น

และในกรณีที่โจทย์ให้สมการของ $f(x)$ มา เราสามารถหา $f(k)$ ได้โดยแทนค่า $x=k$ ลงไปในสมการ $f(x)$

เช่น ถ้า $f(x) = 2x-1$ จะได้ $f(3) = 2(3)-1 = 5$

$f(1) = 2(1)-1 = 1$

ถ้า $f(x) = x^2+1$ จะได้ $f(3) = 3^2+1 = 10$ $\quad f(0) = 0^2+1 = 1$

$f(-1) = (-1)^2+1 = 2$ $\quad f(a) = a^2+1$

นอกจากนี้ ยังแทนค่า x เป็นอะไรอย่างอื่นอย่างอื่นแบบแปลกๆก็ได้ เช่น

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2+1 \\ &= x^2+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3b) &= (3b)^2+1 \\ &= 9b^2+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1-x) &= (1-x)^2+1 \\ &= 1^2-2x+x^2+1 \\ &= x^2-2x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x+1}) &= \sqrt{x+1}^2+1 \\ &= x+2 \quad ; x\ge -1 \end{aligned}$$

$$f(g(x)) = (g(x))^2+1$$

ทำนองกลับกัน ถ้าโจทย์ให้ $f(x)$ แบบที่แทนค่า x แบบแปลกๆไปเรียบร้อยแล้ว

เราต้องสามารถ “แปลงกลับ” ให้เป็น $f(x)$ แบบปกติ ก่อนแทน ได้

เพื่อป้องกันการสับสนระหว่าง x ก่อนแทน กับ x หลังแทน เรามักใช้ตัวแปร k เข้ามาคั่น แล้วแปลงกลับเป็น x ตอนจบ

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f(1-x) = x^2-2x+2$ จงหา $f(x)$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เราต้องเปลี่ยน $f(1-x)$ ให้กลายเป็น $f(x)$ โดยจะเปลี่ยน $f(1-x)$ เป็น $f(k)$ ก่อน

ให้
$$\begin{aligned} 1-x &= k \\ -x &= k-1 \\ x &= -k+1 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f(1-x) &= x^2-2x+2 \\ f(k) &= (-k+1)^2-2(-k+1)+2 \\ &= k^2-2k+1+2k-2+2 \\ &= k^2+1 \end{aligned}$$

จะได้ $f(k) = k^2+1$ เปลี่ยนตัวแปร k เป็น x ก่อนตอบ จะได้ $f(x)=x^2+1$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = x^2 - 1$ จงหา $f(x)$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เราต้องเปลี่ยน $f\left(\frac{x-1}{2}\right)$ ให้กลายเป็น $f(x)$ โดยจะเปลี่ยน $f\left(\frac{x-1}{2}\right)$ เป็น $f(k)$ ก่อน

ให้ $\frac{x-1}{2} = k$

$x - 1 = 2k$

$x = 2k + 1$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{x-1}{2}\right) &= x^2 - 1 \\ f(k) &= (2k+1)^2 - 1 \\ f(k) &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \end{aligned}$$

จะได้ $f(k) = 4k^2 + 4k$ เปลี่ยนตัวแปร k เป็น x จะได้ $f(x) = 4x^2 + 4x$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f\left(\sqrt{x+1}\right) = x^2 + 1$ จงหา $f(2)$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ จะทำแบบข้อที่แล้ว คือหา $f(x)$ ออกมาก่อน แล้วค่อยแทน $x = 2$ ก็ได้

แต่วิธีที่ง่ายกว่า คือ หา $f(2)$ โดยตรงเลย ดังนี้

โจทย์กำหนดให้ $f\left(\sqrt{x+1}\right) = x^2 + 1$

เราจะหา $f(\ 2\ )$

ดังนั้น ต้องเทียบ

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= 2 \\ x + 1 &= 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

แทนใน $x^2 + 1$ ได้ $3^2 + 1 \to 10$

ดังนั้น $f(2) = 10$ #

เนื่องจากฟังก์ชัน เป็นความสัมพันธ์ชนิดหนึ่ง ดังนั้น โจทย์ในเรื่องความสัมพันธ์ ก็จะนำมาถามกับฟังก์ชันได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 1$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ทำเหมือนกับหาโดเมน และเรนจ์ ของความสัมพันธ์ $y = x^2 + 1$

จะเห็นว่าสมการที่โจทย์ให้ อยู่ในรูปที่หาโดเมนได้เลย

เนื่องจาก x ไม่เป็นตัวหาร และ ไม่อยู่ใน $\sqrt{\ }$ ดังนั้น $\mathrm{D}_f = \mathrm{R}$

ถัดมา หาเรนจ์ เนื่องจาก มี x^2 อยู่ในสมการความสัมพันธ์ ดังนั้น เราจะใช้วิธีพิจารณาช่วงค่าที่เป็นไปได้

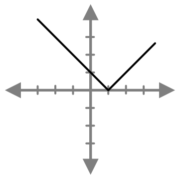
$$\begin{aligned} x^2 &\ge 0 \\ x^2 + 1 &\ge 1 \\ y &\ge 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathrm{R}_f = [1, \infty)$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ $f = \{(1,2), (2,4), (3,2), (4,1)\}$ จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1. $f(1)$
   2. $f(2) + 1$
   3. $f(2 + 1)$
   4. $f(2^2)$
   5. $\left(f(2)\right)^2$
   6. $f\left(f(1)\right)$

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูป
จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้



1. $f(0)$
2. $f(-1)$
3. $f\big(f(3)\big)$
4. $f(-10)$

3. จงหา D_f และ R_f
1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = \sqrt{x-4} + 1$
3. $f(x) = |x + 1|$
4. $f(x) = x^2 + 6x + 1$

4. กำหนดให้ $f(x) = 1 - 2x - x^2$ จงหา
1. $f(2)$
2. $f(-x)$
3. $f(x^2)$
4. $f(1 - x)$

5. กำหนดให้ $f(x) = 2x+1$ จงหา $f\big(f(x)\big)$

6. กำหนดให้ $f(2x+1) = 4x+3$ จงหา $f(x)$

7. กำหนดให้ $f(x-1) = 2x$ จงหา $f(x+1)$

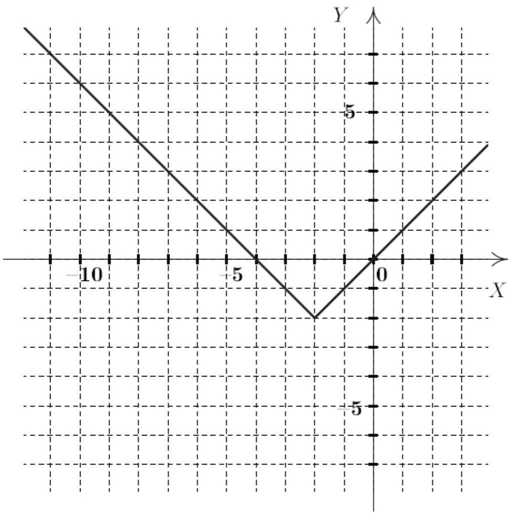
8. กำหนดให้ $f\left(\sqrt{x^2+1}\right) = x^2-1$ จงหา $f(2)$

9. กำหนดให้ $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $x \neq 1$ จงหา $f(x)$

10. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f(2x+1)=4x^2+14x$ จงหา $f(x)$

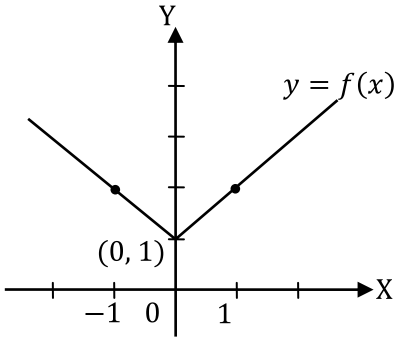
11. ถ้า $f=\{(1,\ 0),\ (2,\ 1),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2)\}$ แล้ว $f(2)+f(3)$ มีค่าเท่าใด [O-NET 49/2-1]

12. กำหนดให้กราฟของฟังก์ชัน f เป็นดังนี้



ค่าของ $11f(-11)-3f(-3)f(3)$ คือเท่าไร [O-NET 53/13]

13. ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในข้อใดมีกราฟดังรูปต่อไปนี้ [O-NET 49/1-7]



1. $f(x) = 1 - |x|$
2. $f(x) = 1 + |x|$
3. $f(x) = |1 - x|$
4. $f(x) = |1 + x|$

14. ถ้า $f(x-2) = 2x - 1$ แล้ว $f(x^2)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร [O-NET 54/11]

15. จำนวนในข้อใดต่อไปนี้เป็นสมาชิกของโดเมนของฟังก์ชัน $y = \frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{2x-1}{x^2-1}$ [O-NET 52/15]

1. -2
2. -1
3. 0
4. 1

16. ถ้า $f(x) = 3 - \sqrt{4 - x^2}$ แล้ว จงหา D_f และ R_f [O-NET 54/10]

17. ถ้า $f(x) = \sqrt{3-x}$ และ $g(x) = -2 + |x-4|$ แล้ว $D_f \cup R_g$ คือข้อใด [O-NET 53/12]

1. $(-\infty, 3]$ 2. $[-2, \infty)$ 3. $[-2, 3]$ 4. $(-\infty, \infty)$

18. ถ้า $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$ แล้ว เรนจ์ของ f คือเซตในข้อใด [O-NET 56/14]

1. $\{ y \mid -1 < y \leq 0 \}$ 2. $\{ y \mid -1 \leq y < 0 \}$ 3. $\{ y \mid y < -1$ หรือ $y > 0 \}$

4. $\{ y \mid y < -1$ หรือ $y \geq 0 \}$ 5. $\{ y \mid y \leq -1$ หรือ $y > 0 \}$

ฟังก์ชันกำลังสอง

ฟังก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นตัวเลขอะไรก็ได้ ที่ $a \neq 0$

เช่น $f(x) = 2x^2 - x + 5 \quad \rightarrow \; a = 2,\; b = -1,\; c = 5$

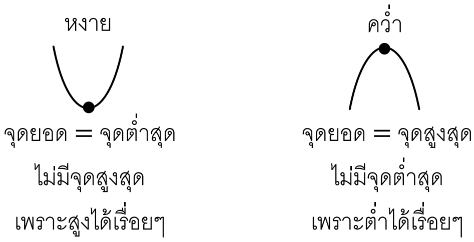
$f(x) = 3 + 2x - x^2 \quad \rightarrow \; a = -1,\; b = 2,\; c = 3$

$f(x) = x^2 \quad \rightarrow \; a = 1,\; b = 0,\; c = 0$

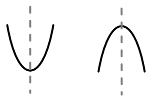
ถ้านำฟังก์ชันกำลังสอง ไปวาดกราฟ จะได้กราฟที่เรียกว่า “พาราโบลา” ซึ่งจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งที่มีการวกกลับ

- ถ้า a เป็นบวก จะได้พาราโบลา “หงาย”
  ถ้า a เป็นลบ จะได้พาราโบลา “คว่ำ”

- จุดที่พาราโบลา วกกลับ เรียกว่า “จุดยอด” สูตรหาพิกัดของจุดยอด คือ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$



- เรียกแนวเส้นตรงที่ผ่ากลางพาราโบลาว่า “แกนสมมาตร”
  เวลาตอบแกนสมมาตร ให้ตอบเป็นสมการ $x = -\frac{b}{2a}$ ↘ = พิกัดตัวหน้าของจุดยอด



<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x - 5$ พร้อมทั้งบอกสมการแกนสมมาตร

<u>วิธีทำ</u> จะได้ $a = 1,\; b = 2,\; c = -5$

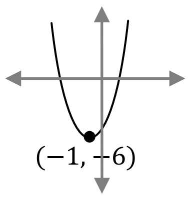
เนื่องจาก $a = 1$ เป็นบวก ดังนั้น เป็นกราฟหงาย

จุดยอด เป็นจุดต่ำสุด และมีพิกัด $= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$= \left(-\frac{2}{2(1)}, \frac{4(1)(-5)-2^2}{4(1)}\right)$

$= \left(-1, \frac{-24}{4}\right)$

$= (-1, -6)$



สมการแกนสมมาตร คือ $x = -1$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $g(x) = 4 - x^2$ พร้อมทั้งบอกสมการแกนสมมาตร

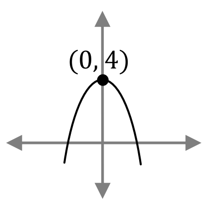
<u>วิธีทำ</u> จะได้ $a = -1,\; b = 0,\; c = 4$

เนื่องจาก $a = -1$ เป็นลบ ดังนั้น เป็นกราฟคว่ำ

จุดยอด เป็นจุดสูงสุด และมีพิกัด $= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$= \left(-\frac{0}{2(-1)}, \frac{4(-1)(4)-0^2}{4(-1)}\right)$

$= (0, 4)$



สมการแกนสมมาตร คือ $x = 0$ #

อีกรูปหนึ่งของฟังก์ชันกำลังสองที่นิยมใช้ คือ $f(x) = a(x-h)^2 + k$

เช่น $f(x) = 2(x-1)^2 + 5$ $\quad \rightarrow a = 2\,, \quad h = 1\,, \quad k = 5$

$f(x) = -(x+2)^2$ $\quad \rightarrow a = -1\,, \quad h = -2\,, \quad k = 0$

$f(x) = 2x^2 - 5$ $\quad \rightarrow a = 2\,, \quad h = 0\,, \quad k = -5$

$f(x) = 3 - (x+2)^2$ $\quad \rightarrow a = -1\,, \quad h = -2\,, \quad k = 3$

ถ้าโจทย์ให้สมการในรูปนี้ จะมีวิธีวาดกราฟดังนี้

- ถ้า a เป็นบวก จะได้พาราโบลาหงาย ถ้า a เป็นลบ จะได้พาราโบลาคว่ำ
- จุดยอด มีพิกัด คือ (h, k)
- สมการแกนสมมาตร คือ $x = h$

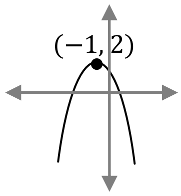
<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -(x+1)^2 + 2$ พร้อมทั้งบอกสมการแกนสมมาตร

<u>วิธีทำ</u> จะได้ $a = -1\,,\ h = -1\,,\ k = 2$

เนื่องจาก $a = -1$ เป็นลบ ดังนั้น เป็นกราฟคว่ำ

จุดยอด เป็นจุดสูงสุด และมีพิกัด $= (h, k) = (-1, 2)$

สมการแกนสมมาตร คือ $x = -1$



#

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโดเมน และ เรนจ์ ของฟังก์ชัน $g(x) = x^2 - 5$ จากกราฟ

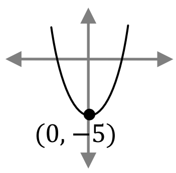
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ บังคับว่าให้หาโดเมนและเรนจ์ จากกราฟ ดังนั้น ต้องวาดกราฟให้ได้ก่อน

ข้อนี้จะมองในรูป $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ก็ได้ $\quad \rightarrow a = 1\,, \quad h = 0\,, \quad k = -5$

- เป็นกราฟหงาย , จุดยอด $= (0, -5)$

หรือจะมองในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ ก็ได้ $\quad \rightarrow a = 1\,, \quad b = 0\,, \quad c = -5$

- เป็นกราฟหงาย , จุดยอด $= \left(-\frac{0}{2(1)}, \frac{4(1)(-5)-0^2}{4(1)}\right)$ $= (0, -5)$



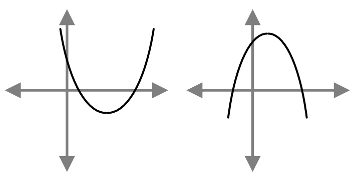
จากกราฟ จะได้ $\mathrm{D}_f = \mathrm{R}$

$\mathrm{R}_f = [-5, \infty)$

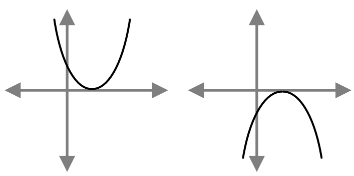
#

อีกอย่างที่โจทย์จะถามได้ คือ “จุดตัดแกน” ซึ่งมีอยู่ 2 ประเภท คือ จุดตัดแกน X กับ จุดตัดแกน Y

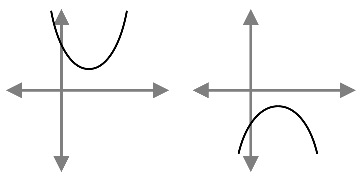
- จุดตัดแกน X คือจุดที่ พาราโบลา ตัดกับแกน X ปกติจะตัด 2 จุด แต่บางทีก็ตัดจุดเดียว หรือไม่ตัดเลย
- จุดตัดแกน Y คือจุดที่ พาราโบลา ตัดกับแกน Y พาราโบลาทุกรูป จะตัดแกน Y หนึ่งจุดเสมอ



ตัดแกน X สองจุด
ตัดแกน Y หนึ่งจุด



ตัดแกน X หนึ่งจุด (สัมผัสแกน X)
ตัดแกน Y หนึ่งจุด



ไม่ตัดแกน X
ตัดแกน Y หนึ่งจุด

เรามีวิธีหาพิกัดของจุดตัดแกน ดังนี้

- หาจุดตัดแกน X ให้แทน $y = 0$ แล้วหา x (เพราะจุดตัดแกน X จะมีพิกัด Y เป็นศูนย์เสมอ)
- หาจุดตัดแกน Y ให้แทน $x = 0$ แล้วหา y (เพราะจุดตัดแกน Y จะมีพิกัด X เป็นศูนย์เสมอ)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ของ $f(x) = x^2 - 3x - 4$

<u>วิธีทำ</u> หาจุดตัดแกน X ต้องแทน $y = 0$

$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$
$$0 = x^2 - 3x - 4$$
$$0 = (x-4)(x+1)$$
$$x = 4, -1$$

ดังนั้น จุดตัดแกน X คือ $(4, 0)$ และ $(-1, 0)$

หาจุดตัดแกน Y ต้องแทน $x = 0$

$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$
$$y = 0^2 - 3(0) - 4$$
$$y = -4$$

ดังนั้น จุดตัดแกน Y คือ $(0, -4)$ #

จะเห็นว่า จุดตัดแกน Y จะหาง่ายกว่า เพราะแค่แทนค่า คิดเลข

จุดตัดแกน X มักจะต้องแก้สมการกำลังสอง และมักต้องแยกตัวประกอบ

ในกรณีที่แยกตัวประกอบไม่ได้ อาจต้องใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

และถ้าใน $\sqrt{}$ ติดลบ แปลว่าสมการไม่มีคำตอบ ซึ่งแปลได้ว่ากราฟไม่ตัดแกน X นั่นเอง

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ของ $f(x) = x^2 + 4x - 3$

<u>วิธีทำ</u> หาจุดตัดแกน X ต้องแทน $y = 0$

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$
$$0 = x^2 + 4x - 3$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-3)}}{2}$$
$$= -2 \pm \sqrt{7}$$

ดังนั้น จุดตัดแกน X คือ $(-2+\sqrt{7}, 0)$ และ $(-2-\sqrt{7}, 0)$

หาจุดตัดแกน Y ต้องแทน $x = 0$

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$
$$y = 0^2 - 4(0) - 3$$
$$y = -3$$

ดังนั้น จุดตัดแกน Y คือ $(0, -3)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาว่า $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ตัดแกน X กี่จุด

<u>วิธีทำ</u> หาจุดตัดแกน X ต้องแทน $y = 0$

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$
$$0 = x^2 + 2x + 3$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(3)}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

จะเห็นว่าในรูทติดลบ ดังนั้น กราฟไม่ตัดแกน X #

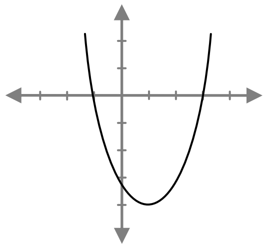
นอกจากนี้ เรายังต้องอ่านและวิเคราะห์กราฟพาราโบลา ให้เป็นด้วย
ส่วนใหญ่ เราจะต้องการดูว่า ค่า y ที่บริเวณต่างๆในกราฟเป็นอย่างไร

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $f(x) = x^2 - 2x - 3$ จงพิจารณาว่าข้อใดผิด

1. กราฟของ f อยู่ใต้แกน X สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $(0, 2)$
2. $f(x) \geq -5$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
3. $f(1+\sqrt{2}) = f(1-\sqrt{2})$
4. $f(2+\sqrt{2}) < f(2-\sqrt{2})$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการกราฟที่โจทย์ให้ จะได้ $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ $\rightarrow$ เป็นกราฟหงาย

จุดยอด $= \left(-\frac{-2}{2(1)}, \frac{4(1)(-3)-(-2)^2}{4(1)}\right) = (1, -4)$



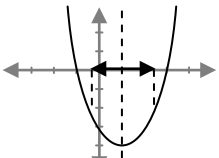
หาจุดตัดแกน X: $0 = x^2 - 2x - 3$

$0 = (x-3)(x+1)$

$x = 3, -1$

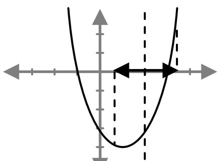
<u>ข้อ 1</u> จะเห็นว่า บริเวณ $x \in (0, 2)$ กราฟอยู่ใต้แกน X ดังนั้น ข้อ 1 ถูก

<u>ข้อ 2</u> จากกราฟ ค่า y ที่ต่ำที่สุดคือ -4 ซึ่ง > -5 ดังนั้น ข้อ 2 ถูก



$x = 1$

<u>ข้อ 3</u> เนื่องจากจุดยอด มีพิกัด $x = 1$ ดังนั้น กราฟจะสมมาตรรอบๆ $x = 1$
นั่นคือ ที่ $x = 1 + k$ กับที่ $x = 1 - k$ กราฟจะมีค่า y เท่ากัน
ดังนั้น ค่า y ตรง $x = 1 + \sqrt{2}$ ก็จะต้องเท่ากับ ค่า y ตรง $x = 1 - \sqrt{2}$
ดังนั้น ข้อ 3 จริง



$x = 2$

<u>ข้อ 4</u> จากกราฟ จะเห็นว่า ตรง $x = 2$ กราฟเป็นช่วงขาขึ้น
หมายความว่า ที่ $x = 2 + k$ กราฟจะสูงขึ้น แต่ที่ $x = 2 - k$ กราฟจะต่ำลง
ดังนั้น ค่า y ตรง $x = 2 + \sqrt{2}$ ก็จะต้องสูงกว่า ค่า y ตรง $x = 2 - \sqrt{2}$
ดังนั้น ข้อ 4 จึงผิด #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหา ลักษณะกราฟ (คว่ำ/หงาย), จุดยอด, แกนสมมาตร, จุดตัดแกน X, จุดตัดแกน Y, จุดสูงสุด/ต่ำสุด, ค่าสูงสุด/ต่ำสุด ของพาราโบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดรูปกราฟอย่างคร่าวๆ และหาโดเมน, เรนจ์ จากกราฟ

   1. $y = x^2 - 4x + 3$

   ลักษณะกราฟ: จุดยอด:

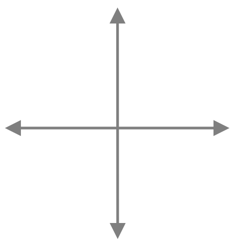
   แกนสมมาตร:

   จุดตัดแกน X: จุดตัดแกน Y:

   จุดสูงสุด: จุดต่ำสุด:

   ค่าสูงสุด: ค่าต่ำสุด:

   โดเมน: เรนจ์:



2. $y + 2 = -(x+1)^2$

ลักษณะกราฟ: จุดยอด:

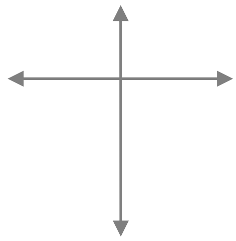
แกนสมมาตร:

จุดตัดแกน X: จุดตัดแกน Y:

จุดสูงสุด: จุดต่ำสุด:

ค่าสูงสุด: ค่าต่ำสุด:

โดเมน: เรนจ์:



2. พาราโบลารูปหนึ่งเป็นกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ ข้อใดถูกต้อง [O-NET 54/12]
   1. พาราโบลารูปนี้มีแกนสมมาตรคือเส้นตรง $x = -1$
   2. พาราโบลารูปนี้มีจุดวกกลับอยู่ในจตุภาคที่สี่

3. ถ้า P เป็นจุดวกกลับของพาราโบลา $y = -x^2 + 12x - 38$ และ O เป็นจุดกำเนิด แล้ว ระยะห่างระหว่างจุด P และจุด O เท่ากับเท่าไร [O-NET 49/1-6]

4. ถ้ากราฟของ $y = x^2 - 2x - 8$ ตัดแกน X ที่จุด A, B และมี C เป็นจุดวกกลับ แล้ว รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่เท่ากับเท่าไร [O-NET 50/25]

อีกหัวข้อในเรื่องพาราโบลาที่นิยมทำไปออกข้อสอบ คือ เรื่องค่ามากสุด - น้อยสุด
วิธีหา คือ ให้หาจุดสูงสุด หรือ จุดต่ำสุด แล้วเอาค่า y ไปตอบ

- ในกราฟหงาย จะไม่มีจุดสูงสุด จุดยอดจะเป็นจุดต่ำสุด โดยค่า y ตรงจุดยอด คือ ค่าน้อยสุด
- ในกราฟคว่ำ จะไม่มีจุดต่ำสุด จุดยอดจะเป็นจุดสูงสุด โดยค่า y ตรงจุดยอด คือ ค่ามากสุด

หมายเหตุ: เวลาที่โจทย์พูดคำว่า "ค่า" เฉยๆ ให้หมายถึง ค่า y

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่ามากสุด หรือ ค่าน้อยสุด ของ $g(x) = 2(x-1)^2 - 3$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้มาในรูป $a(x-h)^2 + k$ โดยที่ $a = 2$, $h = 1$, $k = -3$
เนื่องจาก a เป็นบวก ดังนั้น เป็นกราฟหงาย จะได้จุดยอดเป็นจุดต่ำสุด และมีพิกัดคือ $(1, -3)$
ดังนั้น ค่าน้อยสุด คือ -3 แต่ค่ามากสุด หาไม่ได้ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

5. กำหนดให้ $f(x) = -x^2 + 4x - 10$ ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง [O-NET 49/1-5]
   1. f มีค่าต่ำสุดเท่ากับ -6
   2. f ไม่มีค่าสูงสุด
   3. f มีค่าสูงสุดเท่ากับ 6
   4. $f\left(\sqrt{\frac{9}{2}}\right) < -6$

6. กำหนดให้ $f(x) = (x-3)^2 - 4$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [O-NET 57/14]
   1. กราฟของ f เป็นพาราโบลาหงาย
   2. ถ้า $x \in (1, 4]$ แล้ว $f(x) < 0$
   3. ถ้ากราฟของ f ตัดแกน y ที่จุด $(0, a)$ และค่าต่ำสุดของ f คือ b แล้ว $a + b = 1$

7. ถ้าเส้นตรง $x = 3$ เป็นเส้นสมมาตรของกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -x^2 + (k+5)x + (k^2 - 10)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง แล้ว f มีค่าสูงสุดเท่ากับเท่าไร [O-NET 51/10]

8. ถ้า $f(x) = -x^2 + x + 2$ แล้ว ข้อสรุปใดถูกต้อง [O-NET 53/10]
   1. $f(x) \geq 0$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 2$
   2. จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน f อยู่ในจตุภาคที่สอง
   3. ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดเท่ากับ 2
   4. ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 2

9. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x - 15$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด [O-NET 51/30]
   1. $f(x) \geq -17$ ทุกจำนวนจริง x
   2. $f\left(-3 - \sqrt{2} - \sqrt{3}\right) > 0$
   3. $f\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right) = f\left(1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$
   4. $f\left(-1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right) > f\left(-1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$

10. พาราโบลารูปหนึ่งมีเส้นสมมาตรขนานกับแกน Y และมีจุดสูงสุดอยู่ที่จุด (a, b)
    ถ้าพาราโบลานี้ตัดแกน X ที่จุด $(-1,\ 0)$ และ $(5,\ 0)$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าไร [O-NET 50/10]

นอกจากนี้ เรื่องค่ามาสุดน้อยสุด ยังสามารถออกเป็นโจทย์ปัญหาแบบที่เด็กส่วนใหญ่ไม่ค่อยชอบได้ โดยโจทย์มักจะสร้างเรื่องราวสลับซับซ้อนมาให้ แล้วสุดท้ายให้หา พื้นที่มากสุด ต้นทุนน้อยสุด กำไรมากสุด ฯลฯ วิธีทำโจทย์ประเภทนี้ คือ

1. ให้ y เป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการหาค่ามากสุดน้อยสุด
2. สมมติให้ x แทนปริมาณซักตัว ที่มีผลต่อค่า y
3. เขียนปริมาณอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ให้อยู่ในเทอมของ x
4. เขียนสมการของ y ให้เป็นฟังก์ชันกำลังสองของ x
5. สุดท้าย ใช้ความรู้เรื่องจุดยอดของพาราโบลาเพื่อหาค่ามากสุดน้อยสุด

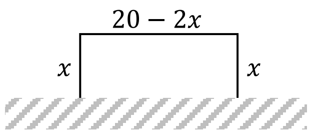
ตัวอย่าง มีลวดยาว 20 เมตร ต้องการล้อมที่ดินริมแม่น้ำให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยล้อมแค่ 3 ด้าน เว้นด้านที่ติดริมแม่น้ำไม่ต้องล้อม จงหาว่าจะล้อมได้พื้นที่มากที่สุดเท่าไร

วิธีทำ ข้อนี้ต้องการพื้นที่มากสุด ดังนั้น ให้ y แทนพื้นที่ และ ให้ x แทนปริมาณซักอย่าง ที่มีผลต่อพื้นที่

ในข้อนี้ เราจะให้ x แทนด้านกว้าง

เนื่องจากมีลวดยาว 20 เมตร

ดังนั้น เหลือลวดสำหรับด้านยาว $= 20 - 2x$



เนื่องจาก พื้นที่ $=$ กว้าง $\times$ ยาว ดังนั้น จะได้สมการ คือ

$$\begin{aligned} y &= x(20-2x) \\ &= 20x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 20x \end{aligned}$$

จะเห็นว่า y เป็นฟังก์ชันกำลังสอง ซึ่งมี $a = -2$, $b = 20$, $c = 0$ $\rightarrow$ เป็นกราฟคว่ำ

จะได้จุดยอดเป็นจุดสูงสุด ซึ่งมีพิกัด $= \left(-\frac{20}{2(-2)}, \frac{4(-2)(0)-20^2}{4(-2)}\right) = (5, 50)$

ดังนั้น y มีค่ามากสุด คือ 50 เมื่อ $x = 5$

นั่นคือ จะได้พื้นที่มากสุด 50 ตารางเมตร

โดยต้องล้อมให้กว้าง 5 เมตร และยาว $20 - 2(5) = 10$ เมตร #

แบบฝึกหัด

11. โยนลูกบอลขึ้นในแนวดิ่ง ถ้าความสูงของลูกบอล (ฟุต) ที่โยนขึ้น $f(t) = -t^2 + 6t$ เมื่อ t แทนเวลา (วินาที)
    1. ที่วินาทีที่ 2 ลูกบอลอยู่สูงจากพื้นที่ได
    2. นานเท่าใดลูกบอลจึงจะอยู่สูงจากพื้น 5 ฟุต
    3. ในขณะที่ลูกบอลอยู่ที่จุดสูงสุดจากพื้น ใช้เวลานานเท่าได

4. ลูกบอลขึ้นสูงสุด กี่ฟุต

5. นานเท่าไรลูกบอลจึงจะตกสู่พื้น

12. เจ้าของโรงงานผลิตตุ๊กตา พบว่าผลกำไร $f(x)$ มีความสัมพันธ์กับจำนวนตุ๊กตา x ดังนี้
$f(x) = -20x^2 + 400x$ จงหา

1. จำนวนตุ๊กตาที่ทำให้โรงงานมีผลกำไร

2. จำนวนตุ๊กตาที่ทำให้โรงงานมีกำไรสูงสุด

3. ผลกำไรมากที่สุด

13. ถ้าต้นทุนในการผลิตของเล่น x ชิ้น เท่ากับ $\frac{1}{3}x^2 - 20x - 200$ บาท โดยขายของเล่นในราคาชิ้นละ 180 บาท ถ้าต้องการผลิตกำไรสูงสุด บริษัทต้องผลิตของเล่นกี่ชิ้น

14. กำหนดให้ x เป็นจำนวนนับ เมื่อรวมกับอีกจำนวนหนึ่งเท่ากับ 10 จงหาค่าสูงสุดของผลคูณระหว่างจำนวนนับสองจำนวนดังกล่าว

15. ลวดเส้นหนึ่ง ยาว 20 ซ.ม. นำมาดัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหาพื้นที่มากสุดที่เป็นไปได้ ของสี่เหลี่ยมนี้

16. เมธาวีต้องการล้อมรั้วที่ดินรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเพื่อเลี้ยงเป็ด โดยที่ดินด้านหนึ่งติดแม่น้ำ ไม่ต้องล้อมรั้ว ถ้าเธอมีลวดยาว 60 เมตร และเป็ดตัวหนึ่ง ต้องใช้พื้นที่ 5 ตารางเมตร จงหาว่า เมธาวีจะเลี้ยงเป็ดได้มากที่สุด กี่ตัว

17. ถ้าคะแนนสอบของนัชชาและวันวิสาข์ รวมกันได้ 10 คะแนน อยากทราบว่าผลบวกของกำลังสองของคะแนนสอบของทั้งสองคน มีค่าน้อยสุดเท่าไร

18. ฟาร์มแห่งหนึ่ง กั้นรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยด้านทิศใต้ติดริมน้ำ ไม่ต้องกั้นรั้ว และรั้วด้านทิศเหนือ ต้องเปิดเป็นช่องกว้าง 10 เมตร ถ้ามีไม้สำหรับทำรั้วยาว 110 เมตร จะสามารถเลี้ยงวัวได้มากที่สุดกี่ตัว เมื่อวัว 1 ตัว ต้องใช้พื้นที่อย่างน้อย 20 ตารางเมตร

19. ถ้า $y^2 - x = 1$ แล้ว xy^2 มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด [O-NET 56/15]

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ a เป็นตัวเลขอะไรก็ได้ ที่มากกว่า 0 และไม่เท่ากับ 1 ที่ผ่านมา x จะเป็นฐานของการยกกำลังซะส่วนใหญ่ แต่ในเรื่องนี้ x จะถูกใช้เป็น "เลขชี้กำลัง"

ก่อนอื่น ต้องรู้ว่า ยิ่งยกกำลังมาก ไม่ได้แปลว่าจะได้ผลลัพธ์มากขึ้นเสมอไป

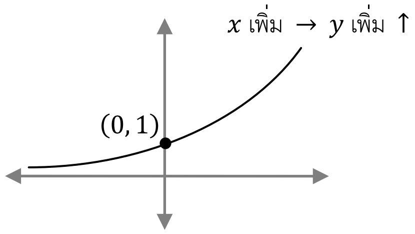
เช่น $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ ↓ มากขึ้น $\qquad (0.1)^2 = 0.01$, $(0.1)^3 = 0.001$ ↓ น้อยลง

ดังนั้น ใน $f(x) = a^x$ จะเห็นว่า

- ถ้า $a > 1$ ยิ่งยกกำลังมาก ก็จะยิ่งได้ค่ามาก
- ถ้า $a < 1$ ยิ่งยกกำลังมาก กลับจะได้ค่าน้อยลง

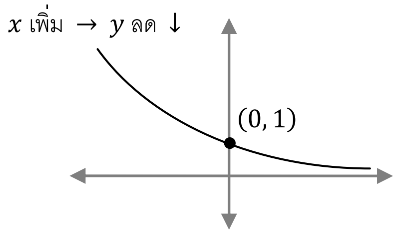
เนื่องจากในเรื่องนี้จะสนใจเฉพาะ a ที่มากกว่า 0 และไม่เท่ากับ 1
ดังนั้น จะแยกพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ กรณี $a > 1$ กับ กรณี $0 < a < 1$

<u>กรณี</u> $a > 1$ เช่น $y = 2^x$
x ยิ่งมาก จะได้ y ที่มากขึ้น



- เมื่อ x เป็นบวกมากๆ ค่า y จะเพิ่มสุดๆ
- เมื่อ x เป็นศูนย์ จะได้ $y = 1$
- เมื่อ x เป็นลบมากๆ ค่า y จะ<u>เกือบ</u>เป็น 0

<u>กรณี</u> $0 < a < 1$ เช่น $y = 0.1^x$
x ยิ่งมาก กลับจะได้ y ที่น้อยลง

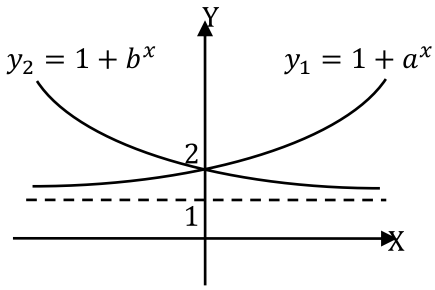


- เมื่อ x เป็นลบมากๆ ค่า y จะเพิ่มสุดๆ
- เมื่อ x เป็นศูนย์ จะได้ $y = 1$
- เมื่อ x เป็นบวกมากๆ ค่า y จะ<u>เกือบ</u>เป็น 0

ไม่ว่าจะเป็นกรณีไหนก็ตาม จะเห็นว่า เมื่อ $x = 0$ จะได้ค่า $y = a^0 = 1$ เสมอ นั่นคือ กราฟจะผ่านจุด $(0, 1)$ เสมอ และจากกราฟของทั้งสองกรณี จะได้ $\mathrm{D}_f = \mathrm{R}$ และ $\mathrm{R}_f = \mathrm{R}^+$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ถ้ากราฟของฟังก์ชัน $y_1 = 1 + a^x$ และ $y_2 = 1 + b^x$ มีลักษณะแสดงในภาพต่อไปนี้แล้ว



ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง [O-NET 51/9]

1. $1 < a < b$
2. $a < 1 < b$
3. $b < 1 < a$
4. $b < a < 1$

2. ถ้า $x = \sin 65°$ แล้ว อสมการในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง [O-NET 49/1-19]

1. $x < x^2 < \frac{x}{1+x}$
2. $x < \frac{x}{1+x} < \frac{x^2}{1+x^2}$
3. $x^2 < x < \frac{x^2}{1+x^2}$
4. $\frac{x^2}{1+x^2} < x^2 < x$

คู่อันดับ

1. 1. $x = 3\ ,\ y = 0$ 2. $x = -1\ ,\ y = 2$
2. 5 3. 6

ผลคูณคาร์ทีเซียน

1. 1. 6 2. 100 3. 4 4. 3
   5. 4 6. 4
2. 1. $\{(a,a), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,c)\}$ 2. $\{(1,2), (1,\{1\}), (\{2\},2), (\{2\},\{1\})\}$
   3. {(สมชาย , สมชาย), (สมปอง , สมชาย)} 4. $\{(1,1), (1,(2,3)), (2,1), (2,(2,3))\}$
3. 1, 4 4. 1

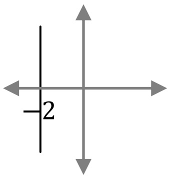
ความสัมพันธ์

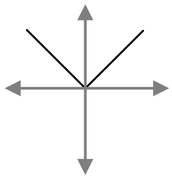
1. 1. $\{(2,6), (4,12), (6,18)\}$ 2. $\{(1,2), (3,8), (5,14), (7,20)\}$
   3. $\{(1,3), (2,6), (3,9)\}$ 4. $(20,2), (20,4), (18,2)$
   5. $\{(1,8), (1,9), (1,10), (2,10)\}$ 6. $\{(6,8), (12,16)\}$
   7. $\{(1,4), (3,2), (7,2), (9,4)\}$ 8. $\{\ \}$
   9. $\{(2,3), (4,5), (6,7), (8,9)\}$
2. 2 3. 10 4. 5 5. 2
6. 3 7. $y = 1000 + 80x - 2x^2$

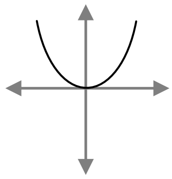
กราฟของความสัมพันธ์

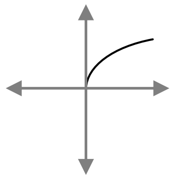
1. 1, 3
2. 1. X : $(3, 0)$ Y : $(0, 2)$ 2. X : $(-\frac{1}{2}, 0)$ Y : $(0, 1)$ 3. X : $(1, 0), (-3, 0)$ Y : $(0, -1)$ 4. X : ไม่ตัด Y : $(0, 3), (0, -3)$
   5. X : $(1, 0), (-1, 0)$ Y : $(0, -1)$ 6. X : $(1, 0)$ Y : ไม่ตัด
3. 1. $(-\frac{1}{2}, \infty)$ 2. $(-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$
4. 1. $(-2, \frac{1}{4})$ 2. $(3, \infty)$
5. 2 6. 2 7. 1 8. 4

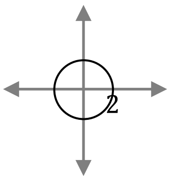
รูปกราฟที่ควรจำ

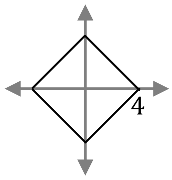
1. 1. 

2. 

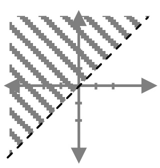
3. 

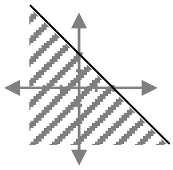
4. 

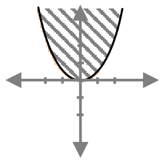
5. 

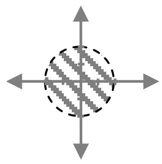
6. 

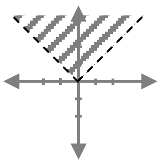
กราฟของอสมการ

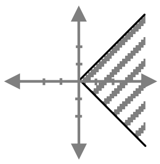
1. 1. 

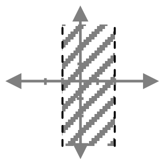
2. 

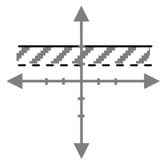
3. 

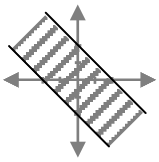
4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

2. 1   3. 4   4. 1   5. 3

โดเมน และ เรนจ์

1. 1. $R - \{0\}$, $R - \{1\}$
   2. $R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$, $R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$
   3. $R - \{-2\}$, $R - \{2\}$
   4. $R - \{0\}$, $R - \{1\}$
   5. $R - \{-1\}$, $R - \{3\}$
   6. R , $[3, \infty)$
   7. R , $[-10, \infty)$
   8. $[0, \infty)$, $[1, \infty)$
   9. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, $[0, \infty)$
   10. $[-1, 1]$, $[0, 1]$
   11. $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$
   12. $[-2, 2]$, $[-2, 0]$
   13. $[-2, 2]$, $[1, 3]$
   14. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $(-\infty, 2]$
2. 1. $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$
   2. $(-\infty, -2] \cup (0, \infty)$
   3. $(-\infty, -3) \cup [-1, 2]$

โดเมนและเรนจ์ จากการพิจารณาช่วงค่า

1. 1. $[5, \infty)$, R
   2. R , $(-\infty, 3]$
   3. R , $[-2, \infty)$
   4. R , $[1, \infty)$
   5. R , $(-\infty, -1]$
   6. $[0, 2]$, $[-1, 1]$
   7. R , $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

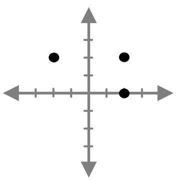
โดเมนและเรนจ์ จากกราฟ

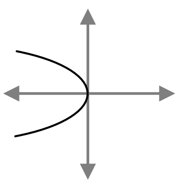
1. 1. $[0, 2]$, $[-1, 3]$
   2. $(-\infty, 0]$, R
   3. R , $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
   4. $(-3, 3)$, $(-3, 3)$
   5. $(-2, 2]$, $(-2, 3)$
   6. R , $[0, \infty)$
   7. R , $(1, \infty)$
   8. R , R

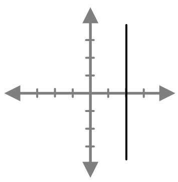
อินเวอร์ส

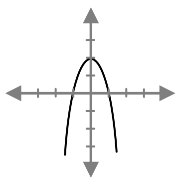
1. 1. $\{(4, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
   2. $\{(x, y) \in B \times A \mid y = \pm\sqrt{x}\}$
   3. $\{(x, y) \in \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R} \mid y = 2x - 1\}$
   4. $y = \frac{2-x}{x}$
   5. $y = \frac{3x+1}{x-2}$
   6. $y = 2 - x$
   7. $y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{2}}$
   8. $y = \frac{x^2-1}{2}$ และ $x \geq 0$
   9. $x^2 + y^2 = 1$
   10. $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ และ $x \geq 0$

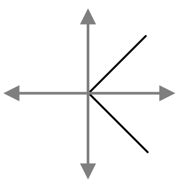
กราฟของอินเวอร์ส

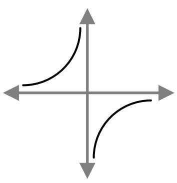
1. 1.


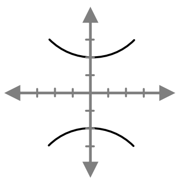
2.


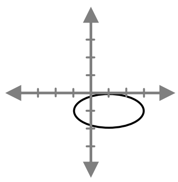
3.


4.


5.


6.


7.


8.


ฟังก์ชัน

1. 1, 2, 4
2. 1, 2, 4, 7, 10, 11
3. 2, 4, 5, 6, 7
4. 2
5. 4
6. 4
7. 1
8. 3

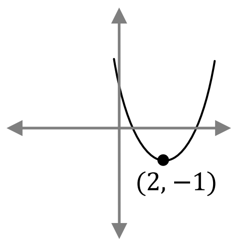
9. 4 10. 3 11. 2

สัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน

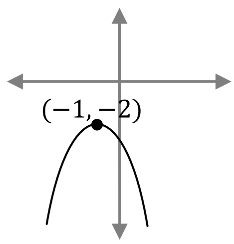
1. 1. 2 2. 5 3. 2 4. 1
   5. 16 6. 4
2. 1. 1 2. 2 3. 1 4. 11
3. 1. R , R 2. $[4, \infty)$, $[1, \infty)$ 3. R , $[0, \infty)$ 4. R , $[-8, \infty)$
4. 1. -7 2. $1 + 2x - x^2$ 3. $1 - 2x^2 - x^4$ 4. $-2 + 4x - x^2$
5. $4x + 3$ 6. $2x + 1$ 7. $2x + 4$ 8. 2
9. $1 - \frac{1}{x}$ 10. $x^2 + 5x - 6$ 11. 6 12. 86
13. 2 14. $2x^2 + 3$ 15. 3 16. $[-2, 2]$, $[1, 3]$
17. 4 18. 5

ฟังก์ชันกำลังสอง

1. 1. ลักษณะกราฟ: หงาย จุดยอด: $(2, -1)$
   แกนสมมาตร: $x = 2$
   จุดตัดแกน X: $(1, 0), (3, 0)$ จุดตัดแกน Y: $(0, 3)$
   จุดสูงสุด: ไม่มี จุดต่ำสุด: $(2, -1)$
   ค่าสูงสุด: ไม่มี ค่าต่ำสุด: -1
   โดเมน: R เรนจ์: $[-1, \infty)$



   2. ลักษณะกราฟ: คว่ำ จุดยอด: $(-1, -2)$
   แกนสมมาตร: $x = -1$
   จุดตัดแกน X: ไม่มี จุดตัดแกน Y: $(0, -3)$
   จุดสูงสุด: $(-1, -2)$ จุดต่ำสุด: ไม่มี
   ค่าสูงสุด: -2 ค่าต่ำสุด: ไม่มี
   โดเมน: R เรนจ์: $(-\infty, -2]$



2. 2 3. $2\sqrt{10}$ 4. 27 5. 4
6. $1, 2, 3$ 7. 0 8. 1 9. 4
10. 2
11. 1. 8 2. $1, 5$ 3. 3 4. 9
   5. $0, 6$
12. 1. $1,2, \dots , 19$ 2. 10 3. 2000
13. 300 14. 25 15. 25 16. 90
17. 50 18. 90 19. $-\frac{1}{4}$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. 3   2. 4

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Gunta Serikijcharoen

และ คุณ Chaiyaklit Adsavavichairote ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ